Ian Stewart

L'eleganza della verità

Storia della simmetria

Einaudi

«Nel corso della storia, la matematica si è arricchita grazie a due fonti principali. Una è il mondo naturale, l'altra è l'astrazione del pensiero logico. Sono queste due basi che, agendo insieme, dànno alla disciplina il suo potere di fornirci informazioni sull'universo. Dirac l'aveva capito benissimo: "Il matematico è impegnato in un gioco di cui si scrive da solo le regole, mentre il fisico gioca con le regole fornite dalla natura. Ma con il passare del tempo appare sempre piú evidente che le regole che un matematico trova interessanti sono proprio le stesse scelte dalla natura". La scienza pura e quella applicata si completano a vicenda; non sono due poli separati, ma gli estremi di uno spettro continuo di pensiero.
La storia della simmetria dimostra che anche una risposta negativa a una domanda sensata può portare a teorie matematiche fondamentali. L'importante è capire perché la risposta è quella».

In sovracoperta: Foto joSon/Stone/Gettyimages.

Titolo originale *Why Beauty is Truth. A History of Simmetry*

Published by Basic Books, A member of the Perseus Books Group

Disegni di Jeff Williams

www.einaudi.it
ISBN 978-88-06-18529-2

Ian Stewart

L'eleganza della verità

Storia della simmetria

Traduzione di Luigi Civalleri

Giulio Einaudi editore

Indice

Prefazione

È il 13 maggio 1832. Nella nebbia del primo mattino, due giovani francesi si fronteggiano con le pistole in mano, sfidandosi a duello per una fanciulla. Si ode uno sparo. Uno dei due cade a terra, ferito gravemente. Si spegnerà due settimane piú tardi per la peritonite, a ventun anni, e verrà sepolto nella fossa comune, senza lapide. Una delle idee piú importanti nella storia della matematica e della scienza rischia di morire con lui.

Il sopravvissuto rimane ignoto. La vittima è Évariste Galois, rivoluzionario e ossessionato dalla matematica. I suoi lavori completi non riempiono che sessanta pagine, eppure la sua eredità scientifica è stata di portata sconvolgente. Il suo merito è stato quello di inventare un linguaggio per descrivere la simmetria nelle strutture matematiche e per calcolarne le conseguenze.

Oggi quel linguaggio è noto come «teoria dei gruppi», è assai usato in ambiti teorici e applicativi e si pensa governi la formazione delle strutture nel mondo naturale. La simmetria gioca un ruolo importante anche alle frontiere della fisica, nel mondo quantistico dell'infinitamente piccolo e in quello relativistico dell'infinitamente grande. Potrebbe anche un giorno aprirci la strada verso la tanto agognata «Teoria del Tutto», l'unificazione matematica di quei due settori fondamentali della fisica moderna. E tutto ciò ha avuto inizio da un semplice problema algebrico, che riguarda la soluzione di un'equazione: trovare una serie di numeri, le «incognite», che soddisfino certe condizioni specificate.

La simmetria non è un valore numerico o una forma geometrica, ma un tipo particolare di *trasformazione*, cioè un modo di spostare le cose. Se un oggetto ha ancora lo stesso aspetto dopo una certa trasformazione (per esempio, se ruotiamo un quadrato di 90 gradi) allora siamo in presenza di una simmetria.

Questa semplice idea, in seguito affinata e ampliata, è essenziale per la moderna comprensione scientifica dell'universo e delle sue origini. Al cuore della relatività einsteiniana si trova il principio secondo cui le leggi della fisica devono essere uguali ovunque e in ogni momento. In altre parole, devono essere simmetriche rispetto a spostamenti nello spazio e nel tempo. La fisica quantistica ci dice che ogni cosa nell'universo è costruita a partire da minuscole particelle fondamentali, il cui comportamento è governato da «leggi di natura» matematiche dotate di simmetria. Le singole particelle si possono mutare in altre molto diverse, con un preciso procedimento, e anche queste trasformazioni non alterano le leggi fisiche.

Queste e altre scoperte piú recenti, alle frontiere della scienza contemporanea, non sarebbero mai potute avvenire senza una trattazione profondamente matematica del concetto di simmetria. Tutto si è originato nell'ambito della matematica pura, mentre le applicazioni fisiche si sono viste molto dopo. Capita che idee straordinariamente utili nascano nel mezzo di speculazioni puramente astratte, grazie a quella che Eugene Wigner definí «l'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali». Sembra proprio che a volte si ricavi dalla teoria piú di quanto ci mettiamo dentro all'inizio.

Partendo dagli scribi dell'antica Babilonia e giungendo sino ai fisici del XXI secolo, *L'eleganza della verità* racconta la storia di come i matematici si siano imbattuti nel concetto di simmetria e come la ricerca apparentemente infruttuosa di una certa formula, che si sarebbe poi rivelata impossibile, abbia aperto una nuova finestra sul mondo e abbia rivoluzionato la matematica e le scienze tutte. Piú in generale, la storia della simmetria illustra in modo chiaro come l'influenza sulla cultura e la continuità storica delle idee davvero importanti si possano vedere in modo chiaro nelle epoche piú turbolente, sia dal punto di vista politico sia da quello scientifico.

La prima metà del libro potrebbe sembrare tutto subito poco attinente alla simmetria, men che meno al mondo naturale. Il fatto è che questa idea, cosí profondamente elegante e indispensabile, non nacque e si sviluppò nel modo che ci si potrebbe aspettare, cioè a partire dalla geometria, bensí dall'algebra. Ecco perché una parte cosí consistente del libro è dedicata alla soluzione delle equazioni algebriche. L'argomento potrebbe sembrare troppo tecnico, ma la storia dei vari progressi in materia è davvero appassionante, e molti dei suoi protagonisti hanno vissuto esistenze insolite o drammatiche. I matematici sono pur sempre esseri umani, anche se spesso si perdono nei loro pensieri astratti. Alcuni lasciano alla logica un ruolo eccessivo nella loro vita, ma come vedremo i nostri eroi sono stati fin troppo irrazionali in varie occasioni. Capiremo come sono vissuti e come sono morti, daremo uno sguardo ai loro affari di cuore, li vedremo impegnati in duelli e feroci dispute sulla priorità di una scoperta; alcuni saranno preda di passioni malsane, alcolismo, malattie; lungo la strada, vedremo anche come le loro teorie matematiche si siano precisate e abbiano cambiato il mondo.

Partendo dal X secolo a. C. fino alla scena madre che ha come protagonista Galois, agli inizi del XIX, la storia ricostruisce passo dopo passo i progressi nella soluzione dei vari tipi di equazioni. Vedremo come i matematici si siano a un certo punto impantanati nelle sabbie mobili delle «quintiche», le equazioni in cui l'incognita è elevata alla quinta potenza. Cosa era successo? Forse i loro metodi non funzionavano piú perché quel caso rappresentava qualcosa di fondamentalmente diverso? O forse, semplicemente, non riuscivano a trovare altri metodi piú efficaci? In altre parole, l'impasse era dovuta a un vero ostacolo o all'incapacità dei matematici?

È importante sottolineare che non era in dubbio l'esistenza delle soluzioni, già nota da tempo, quanto la possibilità di ricavarle con una formula algebrica. Nel 1821 il giovane norvegese Niels Henrik Abel sciolse i dubbi provando che una quintica non si poteva risolvere con metodi algebrici. La sua dimostrazione, però, era piuttosto contorta e indiretta, e soprattutto non riusciva a spiegare perché una soluzione generale non fosse possibile.

Questa fu proprio l'impresa di Galois, che scoprí che le quintiche non si possono risolvere per via algebrica a causa delle loro particolari simmetrie. Se un'equazione ha simmetrie che passano, per cosí dire, il test di Galois (cioè si comportano, nell'insieme, in un modo molto speciale che spiegherò a tempo debito), allora le sue radici si possono trovare per via algebrica; altrimenti, la cosa non è possibile.

Dunque, un'equazione di quinto grado non ammette una formula generale di soluzione perché *possiede simmetrie del tipo sbagliato.*

Questa epica scoperta diede origine al concetto che costituisce il secondo tema portante del libro: quello di *gruppo*, che è una specie di «analisi della simmetria». Galois prese il nobile e antico strumento dell'algebra e lo reinventò per rendere possibile lo studio della simmetria.

Per adesso un termine come «gruppo» può essere per qualche lettore parte di un misterioso gergo. Piú avanti, quando nel corso della storia sarà importante che tutti sappiano di cosa si tratta, spiegherò il significato di questo e di altri vocaboli tecnici. Ma è importante capire che a volte abbiamo bisogno di un'etichetta che ci permetta di tenere sott'occhio tutto il nostro bagaglio; per cui, se durante la lettura vi imbattete in un termine tecnico che non viene subito spiegato, usatelo appunto come un'etichetta temporanea, il cui vero significato non importa piú di tanto. In alcuni casi riuscirete a capirne il senso dalla lettura, come avverrà proprio nel caso di «gruppo», che sarà definito solo a metà libro ma salterà fuori anche prima.

Nel corso della storia ci imbatteremo anche nel particolare significato di alcuni numeri, che non sono le costanti fondamentali della fisica ma quelle della matematica, come π. C'è una certa differenza: la velocità della luce potrebbe essere per principio pari a qualsiasi valore, ma nella realtà capita che sia circa 300 000 chilometri al secondo; d'altra parte, π è sempre quello, 3,14159..., e nulla al mondo potrebbe cambiare questo valore.

La non risolubilità della quintica ci dice anche che 5 è un po' come π, cioè è un numero speciale, perché è il primo caso in cui il gruppo di simmetria associato non supera quello che abbiamo chiamato il «test di Galois». Un altro esempio curioso si ha con la sequenza 1, 2, 4 e 8, che ha a che fare con una serie di estensioni matematiche del concetto di «numero reale», prima con i numeri complessi e poi con oggetti chiamati quaternioni e ottonioni, costruiti rispettivamente con 2, 4 e 8 copie dei reali. E poi? Sembra naturale ipotizzare che si possa costruire un sistema con 16 copie, ma in realtà ciò non è possibile, perché non esistono ulteriori estensioni sensate dei numeri reali. Questo risultato è importante e ha profondi significati: ci dice che c'è qualcosa di speciale nel numero 8, qualcosa che ha a che fare con la sottostante struttura dell'edificio matematico.

Oltre a 5 e a 8, in questo libro faranno la loro comparsa molti altri numeri, i piú bizzarri dei quali forse sono 14, 52, 78, 133 e 248. Questi corrispondono alle dimensioni dei cinque «gruppi di Lie eccezionali» e la loro importanza pervade l'intera matematica e gran parte della fisica moderna. Sono i protagonisti principali della storia, mentre altri numeri, che magari differiscono di poco da loro, non sono che comparse.

La scoperta del loro carattere eccezionale avvenne a fine Ottocento, con la nascita dell'algebra astratta nella sua versione contemporanea. Ciò che è importante non sono i valori dei numeri in sé, ma il fatto che giocano un ruolo nel fondare l'intera algebra. A ognuno di loro è associato un oggetto, chiamato per l'appunto gruppo di Lie, dotato di proprietà uniche e importanti. Questi gruppi sono strumenti indispensabili della fisica moderna e sembrano essere legati in qualche modo alla struttura profonda dello spazio, del tempo e della materia.

Il che ci porta all'ultimo tema affrontato nel libro: la fisica delle particelle elementari. Gli scienziati si chiedono da tempo perché lo spazio abbia tre dimensioni e il tempo una sola, cioè perché viviamo in uno spaziotempo a quattro dimensioni. La teoria delle stringhe, il piú recente tentativo di unificazione dell'intera fisica in un solo insieme coerente di leggi, porta a ipotizzare che lo spaziotempo possa avere altre dimensioni «nascoste». L'idea può sembrare ridicola, ma ha dei seri precedenti storici. La presenza di queste dimensioni aggiuntive è forse la caratteristica piú opinabile delle stringhe.

Un punto molto piú controverso è la convinzione che formulare una nuova teoria dello spaziotempo dipenda soprattutto dalla matematica alla base della relatività e della meccanica quantistica, le due colonne portanti della fisica moderna. Si pensa infatti che l'unificazione di queste due teorie, che si contraddicono a vicenda, sia piú un esercizio matematico che un processo sperimentale con nuove e rivoluzionarie scoperte. L'eleganza teorica sembra essere un prerequisito della verità fisica. Questa aspettativa può rivelarsi pericolosa. È importante non perdere mai di vista il mondo fisico: qualsiasi ipotesi salti fuori alla fine dei dibattiti odierni non può ritenersi esonerata dal confronto con l'esperienza e l'osservazione, per quanto nobile sia il suo pedigree matematico.

Al momento, però, ci sono buoni motivi per seguire la via dei calcoli. Tanto per iniziare, se non si trova una teoria unificata davvero convincente non si sa nemmeno quali esperimenti eseguire. Poi, la simmetria gioca un ruolo chiave sia in relatività sia in meccanica quantistica e, visto che i due ambiti sembrano avere ben poco in comune, è bene tenersi stretto quel poco che c'è. Le strutture possibili di spazio, tempo e materia sono determinate dalle loro simmetrie; le opzioni piú significative sembrano essere collegate alle strutture algebriche eccezionali. Forse lo spaziotempo ha quelle determinate proprietà perché la matematica permette l'esistenza solo di un numero limitato di forme speciali. Se cosí fosse, occuparsi della parte teorica avrebbe molto senso.

Perché l'universo sembra essere cosí matematico? Sono state date molte risposte a questa domanda, nessuna delle quali mi sembra particolarmente convincente. La corrispondenza tra le idee matematiche e il mondo fisico, come la simmetria tra il nostro senso estetico e i piú profondi concetti algebrici, è un mistero fitto e forse irresolubile. Nessuno sa dire perché la bellezza sia verità e la verità bellezza. Tutto ciò che possiamo fare è contemplare l'infinita complessità della loro relazione.

L'eleganza della verità

Quando l'età avrà devastato questa generazione,
Ancora tu ci sarai, eterna, tra nuovi dolori
Non piú nostri, amica all'uomo, cui dirai
«Bellezza è verità, verità bellezza», questo solo
Sulla terra sapete, ed è quanto basta

JOHN KEATS, *Ode su un'urna greca* [trad. it. di Franco Buffoni].

Capitolo primo
Gli scribi di Babilonia

Nella regione che oggi chiamiamo Iraq scorrono due tra i fiumi piú noti al mondo, a cui le importanti civiltà che sono fiorite in quei luoghi devono la loro stessa esistenza. Nascono tra i monti della Turchia orientale, attraversano per centinaia di chilometri una fertile pianura e alla fine si uniscono a formare un unico corso d'acqua che si getta nel Golfo Persico. A sudovest di questa regione si stendono gli aridi altipiani che culminano nei deserti della Penisola Arabica, a nordest le aspre catene montuose dell'Antitauro e degli Zagros. I fiumi, ovviamente, sono il Tigri e l'Eufrate; quattromila anni fa il loro corso era molto simile a quello attuale, e le terre da loro bagnate erano abitate da Assiri, Accadi e Sumeri.

La regione fra il Tigri e l'Eufrate è quella che gli storici chiamano Mesopotamia, che in greco vuol dire proprio «tra i fiumi». Con buone ragioni, viene definita a volte la «culla della civiltà». La presenza dei grandi fiumi rendeva fertili quei luoghi pianeggianti, dove prosperavano molte specie vegetali. Queste attiravano grandi masse di capre selvatiche e cervi, che a loro volta facevano da magnete per i predatori, uomo compreso. La Mesopotamia era un vero paradiso terrestre per i cacciatori-raccoglitori, la terra promessa di molte tribú nomadi.

La zona era cosí fertile da rendere inadeguate la caccia e la raccolta, sostituite da un'attività che metteva in grado gli esseri umani di procurarsi il cibo in modo piú efficiente: l'agricoltura, una nuova, rivoluzionaria tecnologia nata attorno al 9000 a. C. in una zona collinosa all'interno della cosiddetta Mezzaluna Fertile, subito a nord della Mesopotamia. A spron battuto seguirono due cambiamenti fondamentali: la necessità per i gruppi umani di risiedere stabilmente in un territorio, per curare i campi, e l'aumento della popolazione a causa della maggiore disponibilità di cibo. La combinazione di questi fattori portò alla nascita della città; in Mesopotamia si trovano i resti di alcuni dei piú antichi agglomerati urbani del mondo, tra cui le città-stato di Ninive, Nimrud, Nippur, Uruk, Lagash, Eridu, Ur e, su tutte, Babilonia, patria dei giardini pensili e della Torre di Babele. In questi luoghi, quattromila anni fa, il successo dell'agricoltura portò inevitabilmente alla nascita delle società complesse e dello Stato, con i suoi ingombranti corollari: governo, burocrazia, esercito. Tra il 2000 e il 500 a. C. fiorí quella che con termine generico si chiama civiltà «babilonese», che in realtà fu una successione di regni e culture diverse, tra cui quella accadica e quella sumera. Il nome di Babilonia compare per la prima volta in una tavoletta databile attorno al 2250 a. C. trovata ad Akkad, anche se la fondazione della città avvenne probabilmente due millenni prima, se non tre.

Non sappiamo con precisione come e quando sia nata la «civiltà» – termine che si riferisce a un popolo sedentario dotato di organizzazione sociale –, ma sembra proprio che molti aspetti a noi familiari di questo concetto si ritrovassero per la prima volta tra gli antichi Babilonesi. In particolare, li possiamo considerare i fondatori dell'astronomia: erano esperti scrutatori del cielo, che avevano già diviso nelle dodici costellazioni dello zodiaco. A loro si deve anche la numerazione sessagesimale, riflessa nel fatto che attribuiamo 360 gradi a un angolo giro e che misuriamo minuti, secondi e ore in multipli di 60. Queste particolari unità di conto erano necessarie nella pratica astronomica e, proprio per meglio studiare il cielo, i Babilonesi furono costretti a diventare esperti in quell'arte che da sempre è l'ancella dell'astronomia: la matematica.

Proprio come noi, anche loro l'imparavano a scuola.

– Che materia abbiamo oggi? – chiese Nabu, posando il pranzo al sacco sotto la sedia. Sua madre non gli faceva mai mancare un bel pezzo di pane con la carne, in genere di capra. A volte gli dava anche del formaggio, per variare un po'.

– Matematica, – rispose l'amico Gamesh in tono lugubre. – Perché non facciamo soltanto diritto? È l'unica cosa che capisco.

Nabu era bravo in matematica e si meravigliava del fatto che i suoi compagni la trovassero cosí difficile.

– Ma dài, Gamesh, copiare e ricopiare tutte quelle leggi e impararle a memoria è una cosa noiosissima.

L'amico, che vantava grande determinazione e buona memoria, rise di gusto: – Ma va', è facile. Non c'è da pensare.

– Appunto, è proprio per questo che non mi piace. Invece la matematica...

– ... è qualcosa di impossibile, – concluse la frase Humbaba, che era appena arrivato alla Casa delle Tavolette, in ritardo come al solito. – Dài, Nabu, ma che roba è mai questa, – disse indicando il problema che avrebbe dovuto risolvere come compito a casa. – Moltiplicando un numero per se stesso e aggiungendo il doppio del numero si ottiene 24. Qual è il numero?

– Quattro, – rispose Nabu.

– Davvero? – Gamesh era perplesso.

– Questo lo so, – disse Humbaba, – ma come ci si arriva?

Con molta pazienza, Nabu ripeté ai compagni il procedimento che il maestro aveva loro insegnato la settimana prima: – Aggiungete la metà di 2 a 24, cioè 25. Prendetene la radice quadrata, cioè 5...

– Ecco, io questa cosa della radice quadrata non l'ho mai capita, – sbottò Gamesh agitando le braccia.

– Bene, adesso capisco il tuo problema, – rispose Nabu. Gli amici lo guardavano come se fosse impazzito. – Non è risolvere le equazioni, ma calcolare le radici quadrate.

– No no, non so fare niente, – disse Gamesh.

– Le radici vengono prima delle equazioni. Devi imparare bene una cosa alla volta, passo dopo passo, come ci dice sempre il maestro.

– Ci dice anche di non sporcarci i vestiti, – protestò Humbaba, – ma nessuno lo sta a sentire, quindi...

– Ma qui è diverso, la matematica è...

– Inutile! – questa volta era Gamesh a protestare. – Non diventerò mai uno scriba, mio padre mi frusterà tanto che non potrò mai piú sedermi, mia madre mi guarderà con gli occhi imploranti, dicendomi di fare uno sforzo e pensare alla famiglia. Ma la matematica non mi entra in testa. Il diritto sí, invece, e mi piace anche. «Se la moglie di un nobile fa uccidere il marito per colpa di un altro uomo, dev'essere impalata»: queste per me sono cose degne di essere studiate. Non scemenze come le radici –. Tremava tutto agitato e si fermò a prendere fiato. – Cosa ce ne importa di numeri ed equazioni?

– Ma sono utili, – replicò Humbaba. – Hai presente quando si parlava di mozzare le orecchie agli schiavi?

– Certo, le pene per le aggressioni.

– Se cavi un occhio a un cittadino, gli devi pagare in compensazione...

– ... una mina d'argento.

– E se rompi un osso a uno schiavo?

– Devi la metà del suo prezzo al padrone.

Gamesh era finito là dove Humbaba voleva andare a parare: – Allora vedi? Se lo schiavo vale 60 sicli, devi saper calcolare quanto fa la metà di 60. Anche nel diritto serve la matematica.

– Trenta, – rispose subito Gamesh.

– Hai visto, sei capace anche tu! – gridò Nabu.

– Ma non c'è bisogno della matematica per questo, è ovvio –. L'aspirante leguleio agitava le mani in aria, cercando di esprimere in modo compiuto le sue emozioni. – Se si parla del mondo reale allora so fare qualcosa. Ma un problema astratto con le radici quadrate...

– Le radici quadrate servono per misurare la terra, – replicò Humbaba.

– Sí, ma io non devo diventare un agente delle tasse, mio padre vuole che faccia lo scriba come lui. Quindi non vedo il motivo di imparare tutta questa matematica.

– Per me è molto di piú, – disse con calma Nabu. – La matematica parla di ciò che è vero e buono, di come trovare risposte che sai per certo che sono giuste –. L'espressione dei due compagni diceva chiaramente che non erano convinti della cosa.

– Per me è trovare una risposta che so per certo che è sbagliata, – sospirò Gamesh.

Nabu proseguí imperterrito: – La matematica è importante perché è vera e bella. Le radici quadrate sono indispensabili per risolvere le equazioni, e anche se non servono a molte cose pratiche non importa, perché sono fondamentali di per sé.

Gamesh stava per rispondere con qualche espressione poco consona a un'aula scolastica, quando vide entrare il maestro. Si salvò in corner fingendo un attacco di tosse.

– Buon giorno, ragazzi –. L'insegnante era di buon umore.

– Buon giorno, maestro.

– Vediamo subito i vostri compiti.

Gamesh fece un profondo sospiro e Humbaba assunse un'espressione preoccupata. Nabu rimase impassibile: era meglio cosí.

L'aspetto straordinario di questa conversazione, che ovviamente è un prodotto della mia fantasia, è la data in cui si svolgono gli eventi: siamo nel 1000 a. C. circa, nella leggendaria città di Babilonia.

O meglio, la data in cui gli eventi si sarebbero potuti svolgere. Non abbiamo prove dirette dell'esistenza di tre ragazzini chiamati Nabu, Humbaba e Gamesh, né una trascrizione delle loro chiacchiere. Ma la natura umana sembra non essere cambiata per millenni, e i fatti che stanno alla base del mio racconto sono documentati con certezza.

Le nostre conoscenze su quell'antica civiltà sono sorprendentemente ampie, grazie ai documenti che ci ha lasciato. I Babilonesi scrivevano incidendo i loro curiosi caratteri a forma di cuneo su tavolette di creta morbida, che indurite al forte sole della Mesopotamia diventavano praticamente indistruttibili. E se, come capitava, l'edificio in cui erano conservate prendeva fuoco, le tavolette diventavano terracotta, cioè un materiale ancora piú resistente.

Per completare il tutto, la conservazione è stata anche aiutata dalla sabbia del deserto che ha ricoperto le rovine. Ecco perché la storia scritta dell'uomo comincia proprio a Babilonia. Qui ha inizio anche la storia della simmetria, del suo studio e della sua sistematizzazione in una teoria, che diventerà un'«analisi della simmetria» potente tanto quanto l'analisi di Newton e Leibniz. Non c'è dubbio che potremmo retrodatare ulteriormente l'evento, se avessimo a disposizione delle tavolette piú antiche, o una macchina del tempo. Ma per quanto ci dicono le testimonianze scritte, la matematica babilonese è stata la prima a mettere l'umanità sul treno della simmetria, fatto che avrà profonde conseguenze sulla nostra visione del mondo fisico.

La matematica si basa sui numeri, anche se non finisce con loro. I Babilonesi li rappresentavano in modo efficiente con una notazione non decimale, come la nostra, ma sessagesimale, cioè basata sulle potenze di 60. In geometria, studiavano i triangoli rettangoli e conoscevano una regola simile a quella che oggi chiamiamo teorema di Pitagora, anche se, contrariamente ai Greci, le loro nozioni erano di tipo empirico, non supportate da rigorose dimostrazioni. Applicavano tali conoscenze alla nobile arte dell'astronomia e probabilmente all'agrimensura; le usavano per fini sia religiosi sia prosaici, nel commercio e nel calcolo delle tasse. Questo duplice ruolo della matematica, cioè svelare l'ordine insito nel mondo e aiutare l'uomo a sbrigare le sue faccende, percorre tutta la nostra storia come un filo rosso.

Il piú importante contributo dei Babilonesi, comunque, è l'aver capito per primi che le equazioni potevano essere risolte in modo generale.

Un'equazione è la via matematica per ricavare il valore di una quantità incognita, una volta fornite alcune precise informazioni: «Questi sono alcuni fatti noti sul tal numero ignoto, ora trovatelo». È dunque una specie di indovinello, che ci chiede di arrivare all'identità di un numero per via traversa, grazie ad alcuni particolari utili all'identificazione. Questo giochetto può sembrare abbastanza avulso dal concetto geometrico di simmetria, ma in matematica capita spesso che un'idea introdotta in un dato contesto si riveli illuminante anche in campi completamente diversi. È questa connessione tra le parti a dare alla disciplina la sua grande forza concettuale. Ed è anche il motivo per cui un sistema numerico inventato per tenere i conti dei bottegai permise agli antichi Babilonesi di conoscere i movimenti dei pianeti e persino delle stelle fisse.

Il gioco dell'equazione può essere davvero semplice: «Due volte un numero fa 60». Non occorre essere un genio per capire che la soluzione è 30. Passando a indizi un po' piú difficili: «Il numero per se stesso piú 25 dà come risultato 10 per il numero». Procedendo per tentativi ed errori si può arrivare alla soluzione, che è 5, ma questo è un modo molto inefficiente di risolvere i problemi. E se al posto di 25 ci fosse 23? I matematici babilonesi disprezzavano simili mezzucci, perché conoscevano un segreto profondo e importante: una regola, una procedura standardizzata, per risolvere tutte le equazioni di quel tipo. Per quel che ne sappiamo, sono stati i primi al mondo a scoprirne l'esistenza.

Il fascino misticheggiante di Babilonia deriva anche dalle molte volte in cui è citata nella Bibbia; è nota ad esempio la storia di Daniele e il leone, ambientata durante il regno di Nabucodonosor II. Ma con il passare del tempo la città è diventata un luogo mitico, un'antica metropoli fantasma, distrutta senza quasi lasciar tracce, forse mai esistita davvero. Perlomeno, cosí si pensava fino a due secoli fa.

I numerosi tumuli che costellano le piane del moderno Iraq sono lí da millenni. I crociati di ritorno dalle loro imprese portarono con sé in Europa, come souvenir, vari oggetti trovati in mezzo a quelle montagnole di terra e sabbia: mattoni dipinti e frammenti di terracotta con incisioni in un alfabeto indecifrabile. Era evidente che si trattava delle rovine di antiche città, di cui però quasi nulla era noto.

Nel 1811 Claudius Rich fu il primo a studiare in modo scientifico i tumuli iracheni. Un centinaio di chilometri a sud di Baghdad, vicino all'Eufrate, diresse una campagna di scavi sistematici in un sito e si convinse che lí dovevano trovarsi le rovine dell'antica Babilonia. Tra i reperti rinvenuti dalla sua squadra si contarono mattoni, tavolette incise con caratteri cuneiformi, eleganti sigilli di forma cilindrica, usati per stampare caratteri a rilievo sull'argilla umida, e bassorilievi cosí imponenti da far classificare i loro autori come grandi artisti, alla stregua di Leonardo e Michelangelo.

Ma il ritrovamento forse piú interessante fu quello delle centinaia di tavolette incise che spuntavano dappertutto nel sito. Per fortuna, quei pionieri dell'archeologia capirono che si trattava di oggetti importanti e li conservarono con cura. Una volta decifrati i caratteri, le tavolette divennero un ricco tesoro di informazioni sulla vita e sulla civiltà dell'antica Babilonia.

Grazie a questi e ad altri reperti, oggi sappiamo che la Mesopotamia ebbe una storia lunga e intricata, a cui presero parte vari popoli e culture. Il termine «babilonese» si usa di solito per denotare l'insieme di tutte queste civiltà, oltre che per la specifica fase storica che vide il predominio dell'antica metropoli. Ma nella regione si alternarono in realtà molte fasi diverse, e Babilonia fu di volta in volta in auge o nella polvere. Gli storici dividono la sequenza delle varie civiltà in fasi successive, di cui due sono incentrate sulla città: il Primo Impero, all'incirca dal 2000 al 1600 a. C., e il Secondo Impero, dal 625 al 539 a. C. In mezzo ci furono varie dominazioni straniere, nei periodi denominati Antico Assiro, Cassita, Medio Assiro e Neo Assiro. Inoltre la civiltà babilonese, e soprattutto la sua matematica, proseguí nella vicina Siria per almeno altri cinque secoli, nel periodo della dinastia seleucide.

Nonostante l'avvicendarsi dei diversi popoli, il nucleo centrale della cultura rimase stabile, quasi invariato per 1200 anni, se si escludono brevi periodi di crisi politica. È quindi probabile che molti aspetti peculiari di questa civiltà fossero già sviluppati prima dell'epoca in cui se ne trovano testimonianze scritte. In particolare, ci sono prove del fatto che alcune tecniche matematiche, attestate per la prima volta in tavolette risalenti al 600 a. C. circa, fossero in realtà molto piú antiche. Dunque ho immaginato che lo scriba Nabu-Shamash, il personaggio fittizio che ci guiderà in questo capitolo e che abbiamo già incontrato da ragazzino qualche riga sopra, fosse vissuto attorno al 1100 a. C., durante il regno di Nabucodonosor I.

Nei prossimi capitoli incontreremo solo e soltanto personaggi storici, le cui vicende personali sono piú o meno ben documentate, ma tra il milione di tavolette giunte fino a noi non ci sono tracce o quasi di vite individuali, se si escludono regnanti e grandi condottieri. Quindi la storia di Nabu-Shamash dev'essere necessariamente un collage, basato su plausibili deduzioni ricavate da ciò che conosciamo della vita quotidiana a Babilonia. Non gli attribuiremo invenzioni o scoperte, ma vedremo come tra le sue conoscenze figurassero quegli aspetti della matematica babilonese rilevanti per la nostra storia. Ci sono prove convincenti del fatto che gli scribi dell'epoca studiassero a lungo in scuole rigorose, dove l'aritmetica aveva un peso non indifferente.

Il nome del nostro personaggio è dato dall'unione di due divinità babilonesi: Nabu, dio degli scribi e della scrittura, e Shamash, dio del sole. Nella cultura dell'epoca era normale dare ai bambini un nome divino, anche se forse uno formato mettendo insieme due esseri celesti poteva sembrare un po' eccessivo. E comunque, per rendere la narrazione piú vivace e convincente, devo per forza battezzarlo, invece di continuare a chiamarlo «lo scriba».

Nabu-Shamash nacque dunque sotto il regno di Nabucodonosor I, il piú grande re della Seconda Dinastia di Isin, da non confondersi con il suo omonimo biblico, Nabucodonosor II, figlio di Nabopolassar, sul trono tra il 605 e il 562 a. C.

L'età di Nabucodonosor II rappresentò il culmine della civiltà babilonese, e il punto piú alto del dominio della città sul territorio. Anche il regno del suo piú antico omonimo iniziò in un periodo di gloria, quando Babilonia aveva esteso il suo potere fino ad Akkad e alle terre montuose del Nord. Però gli Assiri, durante i regni di Assur-reshishi e del figlio Tiglat-Pileser I, si riorganizzarono e iniziarono la riconquista, rafforzando le loro posizioni sulle montagne e sconfiggendo le tribú del deserto che circondavano la città a nord da tre lati. Dunque Nabu-Shamash nacque in un periodo stabile della storia babilonese, ma alla fine della sua adolescenza la stella della città stava iniziando a tramontare e si preparava un'epoca di guerre e tumulti.

Il nostro eroe era figlio di una tipica famiglia benestante, che abitava nella parte piú antica di Babilonia, non lontano dal canale di Libil-hegalla e dalla giustamente celebre Porta di Ishtar, il varco di ingresso alla città da cui passavano cortei e processioni, splendidamente decorato con ceramiche colorate raffiguranti tori, leoni e draghi. La strada che conduceva alla porta era una notevole realizzazione tecnica: larga venti metri, era lastricata di pietre calcaree che posavano su uno strato di asfalto a sua volta gettato su un letto di mattoni. Nella lingua locale era chiamata «Il nemico non vincerà mai», nome abbastanza tipico per una grande strada di Babilonia. Oggi è nota in genere come «viale processionale», grazie al fatto che nei giorni stabiliti vi si svolgevano le processioni in onore del dio Marduk.

La casa di Nabu-Shamash consisteva di un primo piano di mattoni crudi, con pareti spesse quasi due metri per combattere il caldo, in cui l'unica apertura era la porta d'ingresso. I piani erano tre, e quelli superiori erano fatti in genere di materiali piú leggeri come il legno. La sua famiglia possedeva molti schiavi, a cui era affidata la cura della casa. Le loro stanze si trovavano a destra dell'entrata, assieme alla cucina. A sinistra, nella zona padronale, c'erano una grande sala comune, varie camere da letto e un bagno. All'epoca della nostra storia non esistevano le vasche, che sarebbero comparse solo piú tardi; per lavarsi ci si faceva aiutare da uno schiavo, che a guisa di doccia umana versava acqua sulla testa del padrone. Le stanze si affacciavano su un cortile interno a cielo aperto; sul retro si trovavano magazzini e zone di servizio.

Il padre di Nabu-Shamash era funzionario alla corte del predecessore di Nabucodonosor I, di cui non conosciamo il nome. Le sue mansioni erano di tipo amministrativo: come governatore di un distretto doveva assicurare il rispetto delle leggi, sorvegliare l'irrigazione dei campi e raccogliere varie tasse e gabelle. Aveva studiato da scriba, come il figlio, perché gli equivalenti babilonesi degli impiegati statali dovevano saper leggere e far di conto.

Secondo un decreto celeste che si faceva risalire al dio Enlil, i figli dovevano seguire le orme dei padri. Quindi Nabu-Shamash fu avviato alla carriera di scriba, anche se alla fine del suo percorso scolastico le sue competenze gli avrebbero permesso di scegliere altre strade lavorative, soprattutto all'interno della casta sacerdotale.

Abbiamo una buona idea di cosa studiasse il nostro ragazzo grazie alle molte tavolette in lingua sumera compilate dagli scribi di quel periodo. Da queste testimonianze è chiaro che Nabu-Shamash fu fortunato a nascere in una famiglia benestante, perché solo i figli dei ricchi potevano sperare di essere ammessi a scuola. La fama del sistema educativo babilonese era tale che anche alcuni nobili stranieri mandavano i propri rampolli a studiare in città.

Le lezioni avevano luogo nella cosiddetta Casa delle Tavolette, il cui nome si riferiva ai supporti su cui si incidevano lettere e numeri. L'equivalente del preside era il cosiddetto Saggio, o Maestro della Casa. C'erano poi una sorta di vicepreside, che aveva soprattutto il compito di mantenere la disciplina, e insegnanti di lingua sumera e matematica. Ai migliori alunni anziani, chiamati Fratelli Maggiori, erano affidate varie mansioni, tra cui quella di sorvegliare la condotta dei compagni. Come tutti gli studenti dell'epoca, Nabu-Shamash dormiva a casa propria e si recava a scuola quasi tutte le mattine: 24 giorni sui 30 che costituivano un mese. Tre dei sei giorni di festa erano riservati a cerimonie religiose, mentre gli altri tre erano effettivamente liberi.

La prima fase degli studi consisteva nell'imparare a scrivere in sumero. Si dovevano mandare a memoria grammatiche e dizionari e copiare lunghi elenchi di frasi fatte: sentenze, termini tecnici, nomi di re.

In seguito gli studenti iniziavano ad affrontare i numeri, ed è qui che Nabu-Shamash diventa importante per la nostra storia.

Che cosa veniva insegnato in pratica? Per chiunque non sia un filosofo, un logico o un matematico in vena di pedanterie, un numero è una stringa di cifre. Ad esempio, sto scrivendo questa frase nel 2006, anno rappresentato da un numero di 4 cifre. Però, come i pignoli ci fanno subito notare, questa sequenza non è in realtà il numero, ma una sua rappresentazione in forma particolarmente raffinata. Il nostro sistema decimale utilizza solo dieci cifre, da 0 a 9, con cui riesce a scrivere ogni numero per grande che sia, o per piccolo che sia, grazie a una ben nota convenzione. Soprattutto, permette la rappresentazione di misure con precisione molto elevata: ad esempio, la velocità della luce secondo le piú recenti osservazioni è pari a 299 792,458 km/sec.

Questa notazione è cosí familiare che non ci rendiamo piú conto di quanto sia sofisticata e ci dimentichiamo di quanto sia difficile apprenderla. Il principio fondante dell'intero sistema è questo: il valore numerico di una cifra, come ad esempio 2, dipende dalla posizione della cifra stessa in rapporto alle altre. Dunque, *un simbolo come «2» non ha un significato univoco, indipendente dal contesto.* Nel numero che rappresenta la velocità della luce, il 2 prima della virgola significa davvero «2», ma il primo da sinistra sta per «200 000»; il 2 di 2006, invece, indica «2000».

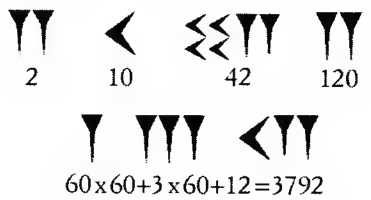
Sarebbe un vero disastro se lo stesso fenomeno si verificasse nel nostro sistema di scrittura della lingua. Pensate, ad esempio, alla difficoltà di leggere un testo in cui le due «a» della parola «alfabeto» indicassero due lettere completamente diverse. Ma la notazione posizionale dei numeri, al contrario, è cosí comoda e portentosa che ci sembra strano pensare di utilizzarne un'altra.

Certo non è stato sempre cosí. Il modo in cui oggi scriviamo i numeri ha solo circa 1500 anni ed è stato portato in Europa poco piú di otto secoli fa. Al giorno d'oggi varie culture utilizzano simboli diversi per le cifre (date un'occhiata a una banconota egiziana, ad esempio), ma un tempo i sistemi di notazione erano assai piú strani e complicati. Il piú noto è sicuramente quello dei Romani, in cui 2006 si scrive MMVI. Lo stesso numero per i Greci sarebbe stato $\overline{\beta}\zeta$. Al posto della sequenza 2, 20, 200 e 2000, i primi avrebbero scritto II, XX, CC e MM, e i secondi β, κ, σ e $\bar{\beta}$.

I Babilonesi furono i primi, per quanto ne sappiamo, a utilizzare una notazione in qualche modo posizionale. Era simile alla nostra, con una significativa differenza. Nel moderno sistema decimale, a ogni spostamento di una cifra verso sinistra corrisponde una moltiplicazione per 10: quindi da 2 si passa a 20 (2×10), poi a 200 (20×10) e cosí via. Per i Babilonesi, il valore corrispondente era dato dal numero 60: quindi «20» significava 2×60 (120 in notazione decimale) e «200» stava per $2 \times 60 \times 60$ (7200 per noi). Ovviamente il simbolo da loro utilizzato non era il nostro «2», ma una coppia di segni lunghi e stretti come quelli in figura 1.1. I numeri da 1 a 9 si scrivevano in modo analogo, raggruppando in varie forme due o piú copie dello stesso segno. Per i numeri maggiori di 9 utilizzavano un segno diverso, tracciato in senso orizzontale, che indicava il 10, anch'esso ripetibile per raffigurare le decine successive. Quindi, ad esempio, il nostro 42 veniva rappresentato con quattro segni orizzontali e due verticali.

Per motivi su cui possiamo solo fare supposizioni, il sistema si arrestava al 59. Il 60 non veniva scritto, come ci aspetteremmo, con sei segni orizzontali, ma ripartendo dal simbolo verticale usato per raffigurare il numero 1, che in questo caso stava per 1×60. Due segni verticali potevano indicare $2 \times 60 = 120$, ma anche semplicemente 2. Quale delle due interpretazioni fosse corretta, lo si doveva capire dal contesto e dalle posizioni relative dei simboli. Ad esempio, se due segni verticali erano seguiti da uno spazio e due altri segni uguali, era chia-

Figura 1.1.
Il sistema di notazione sessagesimale dei Babilonesi.



ro che il primo gruppo stava per $2 \times 60 = 120$ e il secondo per 2, proprio come accade con 22 nella nostra notazione.

Il metodo permetteva di rappresentare numeri molto grandi. Un segno verticale poteva stare per 1, 60, $60 \times 60 = 3600$, $60 \times 60 \times 60 = 216\,000$ e cosí via. La sequenza in basso nella figura 1.1 indica $1 \times 60 \times 60 + 3 \times 60 + 12$, che noi scriveremmo 3792. C'è però un grosso problema dato dalle ambiguità del sistema. Se su una tavoletta vedete a un certo punto due segni verticali isolati, questi stanno per 2, 2×60, $2 \times 60 \times 60$ o cos'altro? Con il passare del tempo i Babilonesi risolsero queste difficoltà; all'epoca di Alessandro Magno indicavano con due tratti diagonali l'assenza di cifre in una data posizione, cioè avevano inventato un simbolo che faceva a tutti gli effetti le funzioni dello zero.

Perché la base sessagesimale e non quella decimale? Forse una risposta possibile sta nelle caratteristiche del numero 60, che ha l'utile proprietà di essere divisibile esattamente per molti altri numeri: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30. È una bella cosa, se si vuole dividere una certa quantità (grano, terre) tra un gran numero di persone.

Un impulso forse decisivo all'uso di questo sistema fu dato dal metodo babilonese di misurazione del tempo. Sembra che trovassero pratico suddividere l'anno in 360 giorni, anche se, da esperti astronomi quali erano, sapevano che 365 era un numero piú preciso, e 365,25 piú preciso ancora. Ma il fascino magnetico della semplice relazione $6 \times 60 = 360$ doveva essere troppo forte. In realtà, quando si riferivano a unità di tempo la notazione posizionale veniva rimpiazzata da una in base 6, in modo che il segno ordinariamente interpretato come il numero 3600 fosse in quel caso letto come 360.

Il ruolo speciale dei numeri 60 e 360 non è andato perduto: ancora oggi diciamo che un angolo giro è fatto di 360 gradi (un anno babilonese), suddividiamo le ore in 60 minuti e i minuti in 60 secondi. Sembra proprio che certe antiche convenzioni di una cultura abbiano una grande resilienza. Per quel che mi riguarda, trovo divertente il fatto che in un'era di grafica digitale avanzatissima come la nostra si usino ancora i numeri romani per etichettare i *sequel* dei film.

Nabu-Shamash imparò tutto quanto abbiamo appena detto, eccezion fatta per il simbolo dello «zero», nei primi anni di scuola. Diventò anche abile nella scrittura, fino a essere in grado di incidere velocemente migliaia di piccoli cunei sulle tavolette di argilla morbida. E proprio come gli studenti di oggi, a un certo punto era dovuto passare dai numeri interi a quelli frazionari, imparando il modo babilonese per indicare quantità come 1/2 o 1/3, per non parlare delle complicate suddivisioni ulteriori imposte dalla cruda realtà delle osservazioni astronomiche.

Un inciso. Per evitare di passare le giornate a riempire la carta di segnetti, oggi gli storici della matematica scrivono i numeri babilonesi in una notazione mista: usano i numeri decimali, divisi da virgole a seconda della loro posizione nell'originale. Quindi il numero in basso nella figura 1.1 viene trascritto come 1,3,12. Questa convenzione risparmia un sacco di spazio, nonché l'uso di caratteri speciali, e qui la seguiremo volentieri.

Tornando alle frazioni, come si rappresentava nell'antica Babilonia l'idea di «un mezzo»?

Oggi affrontiamo il problema in due modi diversi: con le frazioni, 1/2, o con «la virgola», cioè con la notazione decimale, 0,5. La prima notazione è piú intuitiva ed è stata la prima storicamente impiegata; la seconda è un po' piú difficile da imparare ma rende piú semplici i calcoli, perché è un'estensione naturale del sistema posizionale. Infatti la cifra «5» in 0,5 significa «5 *diviso* 10», e in 0,05 starebbe per «5 diviso 100». Cosí come lo spostamento verso sinistra di un simbolo implica la sua moltiplicazione per 10, quello verso destra ne implica la divisione per la stessa quantità. Semplice e coerente.

Alla fine, i numeri frazionari si manipolano in modo non diverso dai numeri interi, con la sola accortezza di tener conto di dove vada posizionata la virgola.

I Babilonesi facevano la stessa cosa, solo in base 60. La frazione 1/2 deve essere dunque riscritta in unità sessagesimali, cioè ovviamente 30/60; la trascrizione moderna prevede un punto e virgola al posto della virgola decimale, quindi una quantità pari a un mezzo si nota con 0;30. Negli originali cuneiformi la separazione tra unità e frazioni di unità è affidata, anche in questo caso, a uno spazietto. Con questo sistema i Babilonesi riuscivano a effettuare calcoli piuttosto complicati. Ad esempio, avevano ricavato per la radice quadrata di 2 il valore 1;24,51,10, che diverge da quello corretto per meno di un centomillesimo. Grazie a questa precisione aritmetica, ottennero ottimi risultati sia nel campo della matematica pura sia in quello dell'astronomia.

Dal nostro punto di vista, la tecnica piú interessante appresa a scuola da Nabu-Shamash era la soluzione delle equazioni quadratiche. Abbiamo molte testimonianze riguardo alle tecniche algebriche babilonesi, ricavate dalle cinquecento tavolette di argomento matematico che ci sono giunte (su un totale di circa un milione). Nel 1930 l'orientalista Otto Neugebauer si accorse che in una di queste era contenuta la descrizione di una tecnica precisa e completa per la soluzione di quelle che oggi chiamiamo, appunto, equazioni di secondo grado o quadratiche, cioè quelle relazioni in cui la quantità incognita è elevata al massimo alla seconda potenza. Per inciso, se non ci fosse il termine quadratico, diremmo che un'equazione è «lineare» (il caso piú semplice da risolvere), mentre se ci fosse anche un termine con l'incognita elevata alla terza potenza chiameremmo l'equazione di terzo grado o «cubica». Riguardo a queste ultime, sembra che i Babilonesi conoscessero un metodo ingegnoso per risolvere certi casi particolari in modo approssimato, grazie all'uso di alcune tavole numeriche. Questa però è solo una supposizione, anche se ben fondata, dedotta dall'esame delle tabelle che ci sono pervenute. Sia come sia, le tavolette studiate da Neugebauer non lasciano dubbi sulle capacità degli scribi babilonesi di affrontare le equazioni quadratiche.

Un tipico problema di 4000 anni fa dice: «Trova il lato di un quadrato la cui area meno il lato stesso è pari a 14,30». L'equazione associata è di secondo grado, a causa della presenza di un'area, e contiene anche un termine lineare. La soluzione è fornita, senza troppe spiegazioni, nella stessa tavoletta: «Prendi metà di 1, cioè 0;30. Moltiplica 0;30 per se stesso, cioè 0;15. Aggiungilo a 14,30 e hai 14,30;15. Questo è il quadrato di 29;30. Ora aggiungici 0;30 e hai 30, il lato cercato».

Non ci avete capito nulla? Riscriviamo il tutto con la notazione decimale:

Prendi metà di 1, cioè 0;30.	$1/2 = 0,5$
Moltiplica 0;30 per se stesso, cioè 0;15.	$0,5 \times 0,5 = 0,25$
Aggiungilo a 14,30 e hai 14,30;15.	$870 + 0,25 = 870,25$
Questo è il quadrato di 29;30.	$870,25 = 29,5 \times 29,5$
Ora aggiungici 0;30 e hai 30.	$29,5 + 0,5 = 30$

Il passo piú difficile è il quarto, in cui si deve trovare un numero (qui 29,5) che moltiplicato per se stesso dia quello di partenza (870,25). I matematici dicono che 29,5 è la *radice quadrata* di 870,25. L'operazione in questione, l'estrazione della radice quadrata, è lo strumento indispensabile per risolvere le equazioni di secondo grado. La sua applicazione a quesiti piú complessi portò in seguito alla nascita dell'algebra.

Piú avanti fornirò la traduzione di questo problema in notazione moderna, ma è importante sottolineare che i Babilonesi ragionavano in modo diverso da noi: non conoscevano una *formula* ma una *procedura*, scritta sotto forma di esempio, che portava al risultato desiderato. Però senza dubbio erano consapevoli del fatto che il procedimento funzionava *in generale*, indipendentemente dai dati specifici.

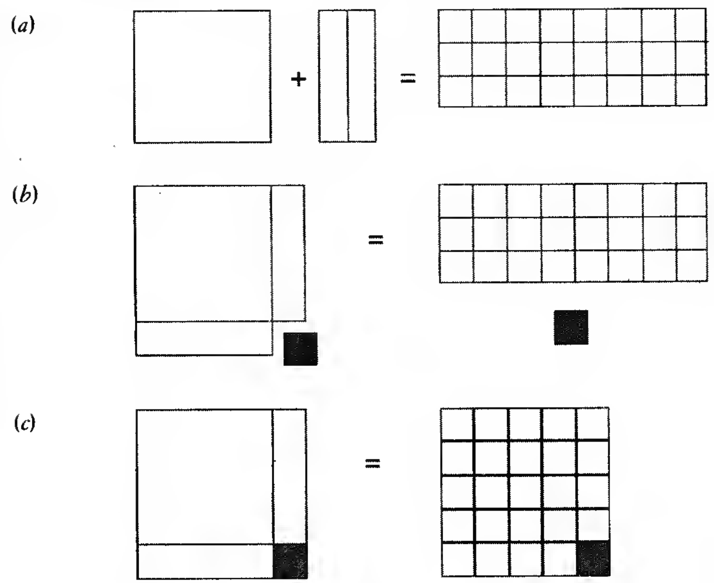
In poche parole, sapevano risolvere le equazioni quadratiche, con lo stesso metodo oggi in uso, anche se scritto in forma diversa dalla nostra.

Come avvenne la scoperta della soluzione? Non ne abbiamo testimonianze dirette, ma è probabile che i Babilonesi ci fossero arrivati per via geometrica. Illustriamo il ragionamento con un esempio piú semplice, ipotizzando di dover risolvere questo problema: trovare il lato del quadrato la cui area sommata a due lati è pari a 24. Detto in termini algebrici, il quadrato dell'incognita piú due volte l'incognita fa 24. Questa equazione si può rappresentare in forma geometrica come in figura 1.2*a*, in cui il lato del quadrato, uguale al lato lungo del rettangolo di sinistra, è l'incognita, mentre l'unità di misura è data da uno dei quadratini piccoli. Spezziamo in due il primo rettangolo e attacchiamo le due parti al quadrato, ottenendo un «quasi-quadrato» a cui manca un'unità per essere completo. Completiamolo aggiungendo un quadratino, che per mantere l'uguaglianza dobbiamo mettere anche a destra (fig. 1.2*b*).

Ora abbiamo a sinistra un quadrato 5×5. Ricomponiamo la figura di destra, anch'essa formata da 25 unità, e otteniamo la figura 1.2*c*, da cui deduciamo che un quadrato il cui lato è l'incognita piú 1 equivale a un quadrato di lato 5. Non ci vuole un genio per concludere che la soluzione è 4.

Questo ragionamento di tipo geometrico riflette esattamente la procedura babilonese per la soluzione delle equazioni di secondo grado. L'esempio piú complicato visto in precedenza, tratto da un'autentica tavoletta, usa proprio lo stesso metodo. Non è scritto in modo esplicito come si arriva alla formula, ma gli indizi a favore di un'origine geometrica sono molti.

Figura 1.2.
(*a*) Rappresentazione geometrica di un'equazione quadratica. (*b*) Completamento del quadrato. (*c*) Ora la soluzione è ovvia.



Capitolo secondo
Il matematico per antonomasia

Molti tra i maggiori matematici dell'antichità vivevano ad Alessandria d'Egitto, città le cui origini leggendarie si perdono in cinque grandi oasi situate nel deserto a ovest del Nilo. Una di queste è Siwa, famosa per i suoi laghi salati, ricchi d'acque d'inverno e praticamente asciutti d'estate. Il sale penetra nel suolo ed è fonte di continui grattacapi per gli archeologi, perché insinuandosi lentamente tra le pietre e i mattoni d'argilla finisce per corrodere i resti dei molti edifici che si trovano nella zona.

La piú visitata meta turistica di Siwa è Aghurmi, celebre per il Tempio dell'Oracolo dedicato al dio Ammone. Questa divinità era cosí sacra da essere considerata un'entità del tutto astratta, anche se in seguito fu associata alla manifestazione fisica di Ra, il dio del sole. Costruito durante la XXVI Dinastia, il tempio di Aghurmi era sede di un rinomato oracolo, a cui sono legati due importanti eventi storici.

Il primo è la distruzione dell'armata di Cambise II, il re persiano conquistatore dell'Egitto. Secondo la tradizione, nel 523 a. C. una spedizione militare fu inviata dal re fino a Siwa per consultare l'oracolo di Ammone e ricevere cosí una legittimazione divina al suo potere. Dopo aver raggiunto l'oasi di Baharyia, però, i Persiani furono colpiti da una tempesta di sabbia e di loro non si seppe piú niente. Secondo molti esperti l'esistenza della cosiddetta «armata perduta di Cambise» è una pura e semplice leggenda, ma nel 2000 un'équipe egiziana dell'Università di Helwan, che esplorava la zona in cerca di petrolio, trovò pezzi di stoffa, metallo e ossa umane che potrebbero essere i resti di quel mitico esercito.

Il secondo evento accadde due secoli dopo ed è storicamente documentato: la fatale visita a Siwa da parte di Alessandro Magno, che si trovava lí per lo stesso motivo di Cambise.

Alessandro era il figlio di Filippo II, re di Macedonia, che fu ucciso durante il banchetto per le nozze della figlia Cleopatra con Alessandro I d'Epiro. L'assassino pare fosse un ufficiale di nome Pausania, forse amante di Filippo, frustrato per qualche suo motivo personale. Secondo un'altra ipotesi, si trattò invece di un complotto organizzato dal re persiano Dario III. In questo caso l'omicidio si tramutò in un autogol: l'esercito macedone proclamò subito re il figlio ventenne di Filippo, Alessandro, che come ognuno sa nel giro di pochi anni avrebbe conquistato gran parte del mondo allora conosciuto, Persia compresa. Nel 332, in particolare, si prese l'Egitto quasi senza combattere.

Nell'intenzione di rafforzare le sue credenziali come sovrano e di farsi considerare alla stregua di un faraone, Alessandro intraprese un pellegrinaggio a Siwa per chiedere all'oracolo lumi sulla sua natura. Ci andò da solo e al suo ritorno annunciò al mondo che l'oracolo di Ammone lo aveva proclamato dio (pare figlio di Zeus, secondo voci piú tarde). Su questo pronunciamento egli pose le basi della propria autorità.

Non è chiaro se gli Egizi si lasciassero convincere da queste prove un po' debolucce o se trovassero prudente credere alla parola di un uomo che poteva contare su un grande esercito. Forse erano semplicemente stanchi di essere governati dai Persiani e consideravano Alessandro il minore dei mali: a Menfi, l'antica capitale, era stato accolto a braccia aperte proprio per questo motivo. Comunque stiano le cose dal punto di vista storico, è chiaro che da quel momento gli Egizi venerarono il sovrano macedone come un nuovo faraone.

Mentre si avvicinava a Siwa, Alessandro fu colpito da una zona situata tra il Mar Mediterraneo e il Lago Mareotide (oggi Maryut); gli piacque tanto che decise di fondare una città proprio lí. Battezzato senza falsa modestia con il nome di Alessandria, il nuovo insediamento fu progettato dall'architetto greco Donocrate secondo una pianta regolare, a quanto pare disegnata dallo stesso sovrano. La data ufficiale di nascita della città è il 7 aprile 331 a. C.; alcuni la contestano, ma di sicuro deve essersi trattato di un anno vicino al 334. Purtroppo il re non vide mai la sua creatura: vi si recò per la seconda volta solo in occasione del suo funerale.

Questa, almeno, è la leggenda che si racconta da secoli. La verità è probabilmente piú complessa. Sembra che all'epoca della sua prima visita la città esistesse già, almeno in forma embrionale. Come hanno scoperto da tempo gli egittologi, le iscrizioni sui templi non sono molto affidabili. Il celebre santuario di Karnak, ad esempio, è ricoperto di cartigli con il nome di Ramesse II, ma sappiamo che fu costruito da suo padre, Seti I, le cui insegne, non sempre sbiadite, si possono scorgere in alcuni casi sotto le iscrizioni piú recenti in onore del figlio. Pare che usurpare il merito dei predecessori fosse una pratica comune, non certo considerata una profanazione. Sarebbe stato uno scandalo, invece, se il figlio avesse fatto abbattere o rimodellare le statue del padre, perché in quel caso l'anima di quest'ultimo sarebbe stata privata della propria identità e quindi di un posto preciso nel regno dei morti.

Alessandro rispettò l'usanza, ricoprendo la città di iscrizioni con il proprio nome, anzi, tramutando la città stessa in una grande iscrizione a sua lode. Laddove gli antichi faraoni usurpavano un tempio o un monumento, il giovane re macedone usurpò un'intera metropoli.

Alessandria divenne presto un grande porto, collegato tramite il delta del Nilo e vari canali al Mar Rosso, quindi porta d'accesso all'Oceano Indiano e all'Oriente. Divenne anche un centro di erudizione e ricerche, grazie alla sua celebre biblioteca. E fu la patria di un matematico che avrebbe avuto un enorme peso nella storia della disciplina: Euclide, padre della geometria.

La vita di Alessandro Magno ci è nota con dovizia di particolari, molto piú di quella di Euclide, anche se a lungo termine l'importanza di quest'ultimo nella storia della civiltà fu probabilmente maggiore: è davvero il matematico per antonomasia. Non sappiamo molto della sua vita, dicevo, ma conosciamo molto bene le sue opere. Per secoli e secoli, in tutto l'Occidente il nome di Euclide fu in un certo senso sinonimo di matematica.

Perché questa straordinaria fama? Altri sono stati piú grandi, o hanno fatto scoperte di maggior rilievo. Eppure per quasi duemila anni ogni studente in Europa (e in misura minore nel mondo arabo) doveva conoscere il suo nome, perché era l'autore del testo piú celebre mai scritto: gli *Elementi di geometria*, di solito citato semplicemente come *Elementi*. Fu uno dei primi libri a essere stampati, dopo l'invenzione dei caratteri mobili; da allora ha avuto oltre mille edizioni in varie lingue, un numero superato solo dalla Bibbia.

Della vita di Euclide sappiamo un po' piú di quanto ci sia noto di quella di Omero, perlomeno le date di nascita e morte: nacque ad Alessandria attorno al 325 a. C. e morí attorno al 265 a. C.

Detto questo, confesso con un certo disagio che non vi ho raccontato tutta la storia. L'esistenza di un matematico di nome Euclide, unico e solo autore degli *Elementi*, è una teoria non del tutto provata, che si scontra con altre due. C'è chi pensa, infatti, che sia effettivamente esistito ma che non sia stato l'unico estensore: forse era il coordinatore di un gruppo di matematici che insieme produssero l'opera. Secondo la terza e ultima ipotesi (assai meno accreditata, ma comunque da non escludere a priori), il nome «Euclide» non identificava un singolo studioso ma era l'equivalente di «Nicolas Bourbaki», identità fittizia assunta a metà del secolo scorso da un gruppo di matematici francesi (quasi tutti giovani) che pubblicavano le loro opere celandosi dietro questo pseudonimo collettivo. Sia quel che sia, la teoria piú probabile rimane quella piú diretta: Euclide è esistito davvero e ha scritto da solo gli *Elementi*.

Ciò non significa che tutto il contenuto dell'opera sia frutto delle sue scoperte. Il suo merito fu piuttosto quello di raccogliere e rendere sistematica una parte corposa del sapere matematico greco. Prese in prestito idee da chi l'aveva preceduto, le rielaborò e lasciò un'importante eredità ai posteri, imponendo il proprio nome come la massima autorità in materia. In genere si pensa che gli *Elementi* siano un libro di geometria, ma in realtà contengono nozioni di teoria dei numeri e qualche idea algebrica in forma embrionale, anche se tutto ciò è presentato in linguaggio geometrico.

Il poco che conosciamo della sua vita l'abbiamo ricavato dai commenti posteriori alla sua opera: sono comunque nozioni frammentarie, che oggi gli specialisti non sono in grado di verificare. Piú di sette secoli dopo la sua morte, circa nel 450 d. C., il filosofo Proclo pubblicò una celebre edizione annotata degli *Elementi*, in cui si legge:

> Nel mettere insieme questo materiale, Euclide riordinò molti teoremi di Eudosso, precisò certi risultati di Teeteto e soprattutto diede dimostrazioni complete e irrefutabili di alcuni risultati che i suoi predecessori avevano provato solo a grandi linee, o con errori. Egli visse al tempo del primo dei Tolomei; infatti Archimede, la cui opera si dipanò poco dopo il regno di costui, fa menzione di Euclide. Come altra prova, si racconta che Tolomeo gli chiese se non ci fosse al mondo una strada meno tortuosa degli *Elementi* per imparare la matematica, e questi rispose che non esisteva una via regia alla geometria. Dunque era troppo giovane per aver fatto parte del circolo di Platone, ma piú vecchio di Eratostene e Archimede, che erano contemporanei (come si può leggere a volte negli scritti del primo). Le sue idee erano comunque di tipo platonico, filosofia per cui aveva forte affinità, tanto da chiudere l'intera opera sua con la costruzione dei cosiddetti solidi platonici.

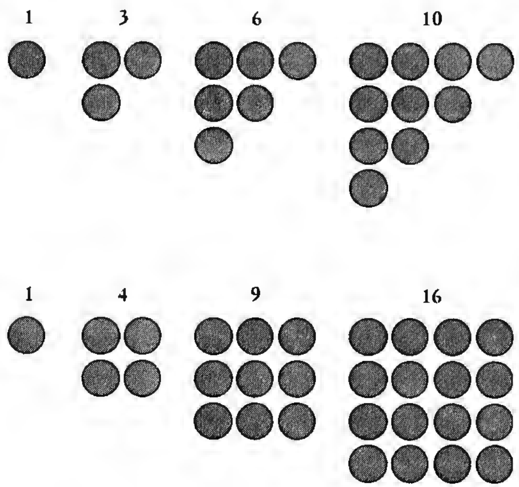
Lo stile argomentativo di alcune parti degli *Elementi* ci fornisce una prova indiretta ma convincente del fatto che Euclide abbia frequentato l'Accademia platonica di Atene. Solo lí, tanto per dire, avrebbe potuto apprendere i risultati geometrici ottenuti da Eudosso e Teeteto. In alcuni frammenti posteriori di Pappo leggiamo che era un uomo «assai giusto e ben disposto verso tutti coloro che si mostravano capaci di progredire in qualche misura nello studio della matematica; cercava di non offendere nessuno e, pur essendo un grande sapiente, non se ne vantava affatto». Su di lui sono stati tramandati pochi aneddoti, tra cui questo riferito da Stobeo: quando un suo discepolo gli chiese cosa avrebbe ottenuto dopo aver capito bene la geometria, il maestro chiamò uno schiavo e gli disse di dare una moneta al ragazzo, perché voleva ricavare profitti da tutto ciò che imparava.

La via greca alla matematica era molto diversa da quella babilonese o egizia. Nelle culture orientali la disciplina era vista soprattutto alla luce della sua utilità pratica, anche se l'aggettivo va calato nel contesto dell'epoca: per gli Egizi era «pratico» calcolare l'inclinazione dei cunicoli nelle piramidi in modo che il *ka* del faraone defunto potesse uscirne orientato nella giusta direzione per raggiungere Sirio. Per molti matematici greci, invece, i numeri non erano strumenti che si rivelavano utili anche in campo religioso, ma in un certo senso erano loro stessi una religione.

Secondo quanto si legge in Aristotele e Platone, attorno al 550 a. C. fiorí la setta dei pitagorici, che considerava il numero l'elemento fondamentale di tutto l'universo. Nella loro visione, il cosmo era dotato di una mistica armonia, che rifletteva certe loro scoperte sulle note musicali e sulle vibrazioni delle corde, le cosiddette «armoniche», legate tra loro da semplici relazioni numeriche (se una corda di una data lunghezza, pizzicata, produce una certa nota, una corda lunga la metà ne produce una piú alta di un'ottava, l'intervallo armonico per eccellenza, e cosí via). La loro classificazione dei numeri era di tipo geometrico e si basava sul modo di raggruppare in forma poligonale le unità. Ad esempio i numeri 1, 3, 6, 10 ecc. erano «triangolari», perché si possono rappresentare come in figura 2.1; analogamente, 1, 4, 9, 16 ecc. erano «quadrati».

La numerologia dei pitagorici era a volte bislacca (per loro il 2 era maschio e il 3 femmina, tanto per dirne una), ma la loro idea dell'esistenza di strutture matematiche profonde nella natura è attuale ancora ai nostri giorni. Anche se la geometria greca dei secoli successivi perse gran parte del suo aspetto misticheggiante, rimase comunque una disciplina autonoma, una branca della filosofia non al servizio di altri scopi pratici.

Figura 2.1.
Numeri triangolari e numeri quadrati.



Questa è perlomeno la storia classica che si racconta, ma ci sono buone ragioni per credere che il panorama fosse piú articolato. È ben dimostrato che Archimede, forse allievo dello stesso Euclide, sfruttò le sue conoscenze matematiche per progettare potenti macchine da guerra. Gli archeologi hanno ritrovato i resti di complessi macchinari dal funzionamento ingegnoso e preciso, che ci fanno intuire un alto livello di progettazione ingegneristica, e di quella che oggi chiameremmo «matematica applicata». Il piú noto di questi reperti è forse la macchina di Anticitera, un complicato sistema di ingranaggi che sembra essere in grado di calcolare vari moti celesti.

Comunque sia, gli *Elementi* si situano perfettamente nella tradizione filosofica della matematica greca, anzi, forse è il contrario: l'idea che ci siamo fatti della matematica greca si basa in gran parte proprio su questo libro. I pilastri di questa opera, in cui non si trova una sola traccia di «applicazioni», sono la deduzione logica e la dimostrazione rigorosa. Per la nostra storia, però, le omissioni degli *Elementi* sono piú importanti del loro contenuto.

Le grandi trovate di Euclide sono sostanzialmente due. La prima è la dimostrazione: un'affermazione matematica non può essere vera se non è ricavata con una sequenza di deduzioni logiche a partire da altri fatti di cui già conosciamo la verità. La seconda è l'assiomatica: il processo di deduzione deve partire da una serie di punti fermi, che a loro volta non possono essere dimostrati. Ecco perché Euclide inizia con l'elencare cinque fatti di base, detti *postulati* o *assiomi*, su cui poggia l'intero edificio delle dimostrazioni che seguono. Quattro sono semplici e intuitivi: dati due punti esiste sempre una retta che li congiunge; ogni retta si può prolungare indefinitamente; dati un punto e una lunghezza del raggio, si può sempre tracciare un circolo avente il punto come centro e la lunghezza come raggio; tutti gli angoli retti sono uguali.

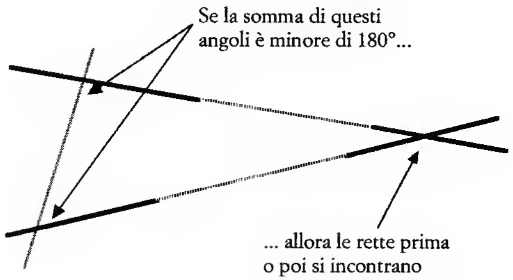
Il quinto postulato è assai diverso dagli altri, si enuncia in forma piú lunga e tortuosa e afferma cose molto meno ragionevoli ed evidenti. Serve soprattutto a garantire l'esistenza delle rette parallele, cioè di quelle rette che non si incontrano mai, ma corrono insieme verso l'infinito sempre alla stessa distanza, come due marciapiedi ai lati di una strada perfettamente dritta e interminabile. Nella formulazione originale di Euclide, il postulato afferma che se due rette si incrociano con una terza, esse si incontreranno dal lato in cui la somma degli angoli creati dall'intersezione è minore di 180° (fig. 2.2). Si può dimostrare che la formulazione appena vista è equivalente dal punto di vista logico a quest'altra: dati una retta e un punto esterno a essa, esiste una e una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Per secoli il quinto postulato fu considerato una macchia sulla perfezione euclidea; in molti tentarono di ricavarlo dagli altri quattro o di sostituirlo con un altro piú semplice. Nell'Ottocento i matematici si resero finalmente conto che Euclide aveva fatto bene i suoi conti, e dimostrarono che il quinto postulato non era deducibile dagli altri.

La dimostrazione, oggi come allora, è una caratteristica imprescindibile del sapere matematico. Ogni affermazione non provata è vista con sospetto, anche se è supportata da molti indizi a favore o foriera di importanti sviluppi. Scienziati come fisici, astronomi e ingegneri hanno in generale una cattiva opinione di questo processo logico, che vedono come una sorta di pedante appendice della verità; loro invece si basano su un efficace sostituto, che è l'osservazione.

Supponiamo che un astronomo voglia calcolare le fasi della Luna in un certo periodo di tempo. Come prima cosa, scrive le equazioni del moto lunare e poi... si blocca, perché sembra che non ci sia modo di risolverle per via matematicamente esatta. Quindi comincia a modificarle qua e là, introducendo nel mentre vari gradi di approssimazione. Per un matematico la cosa è inaccettabile, perché ciò potrebbe avere serie ripercussioni sulla soluzione. Le semplificazioni non sono ammissibili, se non si dimostra che non cambiano il risultato. Ma l'astronomo può capire se sta procedendo in modo corretto grazie a un'altra procedura: controlla se i moti effettivi della Luna si accordano con i suoi calcoli. Se la risposta è affermativa, allora le approssimazioni sono automaticamente accettabili (perché portano a un risultato corretto) e la teoria è verificata. Il ragionamento sembra circolare, ma in realtà non lo è: se il metodo fosse sbagliato dal punto di vista matematico, sicuramente (o quasi) non porterebbe a predizioni corrette circa i moti lunari.

Figura 2.2.
Il quinto postulato di Euclide.



Non potendo permettersi il lusso dell'osservazione o dell'esperimento, il matematico deve verificare la bontà del suo lavoro sulla base della coerenza logica interna. Maggiore è la portata di una certa affermazione, maggiore è la necessità che la si provi con certezza. La faccenda si fa davvero cruciale quando si cerca di dimostrare un fatto che per la sua importanza tutti vorrebbero fosse vero o, meglio, che avrebbe straordinarie conseguenze se fosse vero.

Le dimostrazioni hanno bisogno di solide basi e non possono andare indietro all'infinito. C'è la necessità di un punto di partenza, un punto che definisca i fatti sicuramente veri, che non sono stati provati e non lo saranno mai. Oggi chiamiamo queste verità di base con il nome di assiomi o postulati. In una partita matematica, queste sono le regole del gioco.

Se qualcuno ha obiezioni nei confronti degli assiomi, può cambiarli e dare cosí vita a un diverso gioco. La matematica non sostiene che una certa affermazione sia *vera* in senso assoluto, ma solo che discenda in modo logico da un insieme di fatti di partenza. Questo non implica affatto che i postulati da cui facciamo scaturire il tutto siano immutabili e che non possano essere criticati. Capita che si discuta tra matematici se un certo sistema assiomatico sia meglio o peggio di un altro per determinati scopi, o se abbia maggior merito o interesse intrinseco. Ma questi dibattiti non minano la logica interna di un particolare gioco, perché servono solo a decidere se le partite che possiamo giocare sono utili, interessanti o magari divertenti.

Partendo dai suoi assiomi, e grazie a una lunga e meticolosa catena di deduzioni logiche, Euclide arriva straordinariamente lontano. Tanto per fare un esempio, riesce a dimostrare con logica impeccabile (almeno per l'epoca) che se i postulati sono veri è necessariamente vero che:

a) il quadrato dell'ipotenusa (il lato obliquo) di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati dei cateti (gli altri due lati);
b) esistono infiniti numeri primi;
c) esistono numeri, che oggi chiamiamo *irrazionali*, come la radice quadrata di 2, non esprimibili in modo esatto come frazioni;
d) esistono cinque e solo cinque solidi regolari: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro;
e) un angolo qualsiasi si può dividere esattamente in due parti usando solo la riga e il compasso;
f) i poligoni regolari con 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12 lati si possono costruire esattamente usando solo la riga e il compasso.

Ho scritto questi *teoremi*, come oggi chiamiamo un'affermazione matematica dimostrata, utilizzando le definizioni moderne. Euclide, però, ne discuteva in termini molto diversi: per lui, tutto ciò che noi interpretiamo in modo numerico era relativo a oggetti geometrici, come lunghezze, aree e volumi.

Possiamo dividere il contenuto degli *Elementi* in due grandi categorie. Da un lato ci sono i teoremi, che affermano una qualche verità; dall'altro le costruzioni, che forniscono le istruzioni operative per fare qualcosa.

Un esempio del primo tipo, classico e celeberrimo, è la Proposizione 47 del Libro I, meglio nota come teorema di Pitagora (fig. 2.3), che dimostra una speciale relazione tra il lato piú lungo di un triangolo rettangolo e gli altri due. E basta: a meno di un particolare sforzo interpretativo, non ci insegna a costruire un bel nulla.

Una costruzione che si rivelerà importante per la nostra storia è invece la Proposizione 9 del Libro I, in cui si descrive un procedimento

per attuare la cosiddetta *bisezione dell'angolo*; considerando le tecniche limitate a disposizione, la ricetta di Euclide è semplice ed elegante.

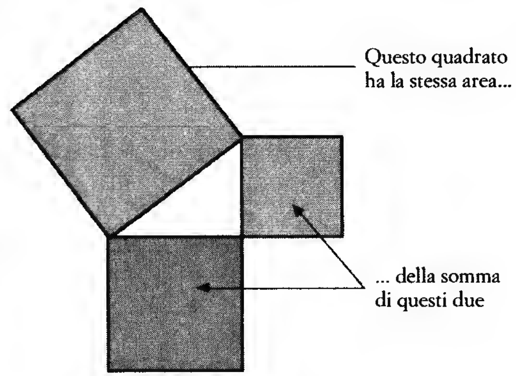
Riferiamoci alla figura 2.4. Partendo da un angolo qualsiasi (*a*), puntiamo il compasso nel vertice e tracciamo un cerchio di raggio a piacere, segnando i punti in cui interseca i due lati (*b*, punti piú scuri). Ora puntiamo il compasso nei punti in questione, con raggio a piacere ma uguale, e tracciamo due cerchi che si incontrano in due punti (*c*, ne abbiamo segnato con tratto piú scuro solo uno). Il problema è risolto: la retta che divide in due l'angolo, detta *bisettrice*, è quella che congiunge il vertice con questi ultimi punti (*d*, tratto chiaro).

Ripetendo la stessa costruzione, è possibile dividere un angolo in 4, 8, 16... parti, cioè in tutte le parti che sono potenze di 2.

Come ho già accennato, ciò che piú ci interessa riguardo agli *Elementi* non sono tanto i contenuti quanto le omissioni. Euclide infatti non fornisce alcun metodo per:

a) dividere esattamente un angolo in tre parti (*trisezione dell'angolo*);
b) costruire un poligono regolare con 7 lati;
c) costruire un segmento di lunghezza uguale a una circonferenza data (*rettificazione della circonferenza*);

Figura 2.3.
Il teorema di Pitagora.

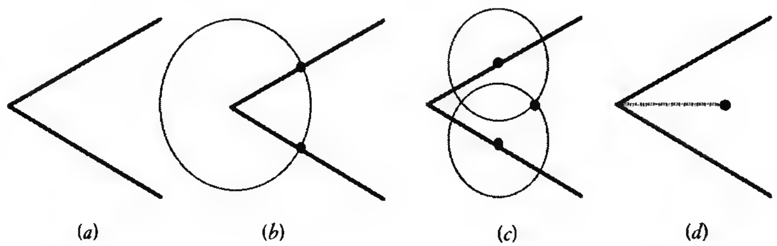


d) costruire un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato (*quadratura del cerchio*);
e) costruire un cubo di volume doppio a quello di un cubo dato (*duplicazione del cubo*).

Secondo un comune sentire, queste mancanze di Euclide furono notate già dai suoi contemporanei, ma gli storici della matematica contestano questo fatto, di cui non ci sono praticamente tracce nei documenti a noi pervenuti. In realtà gli antichi Greci sapevano risolvere quasi tutti questi problemi, utilizzando però metodi proibiti dalle regole di Euclide, che si limitava a riga e compasso. La trisezione dell'angolo si poteva effettuare con l'aiuto di speciali curve dette sezioni coniche, e con un'altra curva particolare, la quadratrice, si riusciva ad affrontare la quadratura del cerchio. Sembra invece che all'epoca nessuno si fosse accorto che dalla trisezione dell'angolo si poteva ricavare la costruzione di un poligono regolare con 7 lati (sí, proprio 7 e non 9: c'è anche una facile dimostrazione per l'ennagono, certo, ma ce n'è una molto piú acuta e interessante per l'eptagono). Anzi, pare che della trisezione importasse proprio poco e che nessuno abbia mai investigato le sue conseguenze.

Gli eredi di Euclide affrontarono le sue omissioni con uno spirito diverso: invece di provare a risolvere quei problemi a ogni costo, si chiesero cosa fosse davvero possibile costruire con quel limitato numero di attrezzi (senza barare, senza segnare punti su due righe, facendole scivolare l'una sull'altra: già i Greci sapevano che con questi

Figura 2.4.
La bisezione di un angolo con riga e compasso.



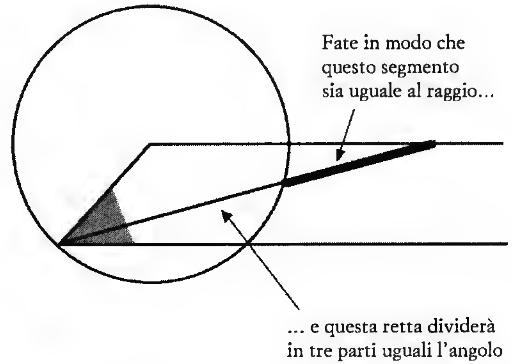
trucchi, da loro chiamati *neusis*, era possibile la trisezione dell'angolo; in figura 2.5 è illustrato uno di questi metodi, dovuto ad Archimede). Delimitare con dimostrazioni precise l'insieme degli oggetti costruibili, distinguendolo da quelli non costruibili, si sarebbe rivelata un'impresa lunga e faticosa, risolta solo alla fine dell'Ottocento. Oggi sappiamo con certezza che nessuno di questi cinque problemi è risolubile con riga e compasso.

Ecco qualcosa su cui riflettere. Invece di provare che un particolare metodo poteva risolvere un particolare problema, i matematici hanno imparato che era piú utile dimostrare il contrario, in forma perentoria: non esiste *alcun* metodo per risolvere il tale problema. In questo modo si sono resi conto dei limiti intrinseci della loro disciplina: l'aspetto affascinante della cosa è che sono stati in grado di dimostrarlo.

Per evitare fraintendimenti, vorrei ora fare qualche precisazione prendendo come esempio il problema della trisezione.

È importante sottolineare che è richiesta una soluzione *esatta*. Questo rigido vincolo è fondamentale nella concezione idealizzata della geometria greca, in cui le rette non hanno spessore e i punti non hanno dimensioni. Le tre parti in cui l'angolo risulta diviso devono essere perfet-

Figura 2.5.
La trisezione di un angolo con il metodo di Archimede.



tamente uguali, non uguali fino a dieci cifre dopo la virgola, ad esempio, o cento, o anche un milione: la soluzione deve essere esatta *all'infinito*. Allo stesso scopo ammettiamo di poter puntare il compasso in un punto con precisione infinita, di aprirlo, con la stessa perfezione, con un raggio uguale a una certa distanza tra due punti e di tracciare una retta infinitamente sottile che congiunge esattamente i punti stessi.

Nella sudicia e caotica realtà le cose non stanno proprio cosí. Dobbiamo allora concludere che la geometria euclidea non serve a nulla nella vita di tutti i giorni? No di certo. Se ad esempio seguite le istruzioni della Proposizione 9 utilizzando un vero compasso e della vera carta, ottenete un'ottima bisettrice: nell'era remota che precede i computer, i grafici usavano proprio questo metodo. L'idealizzazione di un elemento geometrico non è un difetto del sistema, ma è semplicemente il motivo per cui la matematica funziona. All'interno del modello ideale si riesce a lavorare con le armi della logica, perché le proprietà degli oggetti trattati sono note con esattezza. Cosa che non succede affatto nel mondo reale.

Gli oggetti ideali, però, hanno limiti che a volte li rendono inefficaci. Una retta senza spessore non ha grandi applicazioni pratiche, e certo non serve come spartitraffico su una strada. In certi contesti, dunque, dobbiamo apportare le necessarie modifiche al modello. Quello di Euclide è fatto apposta per lavorare per via deduttiva con i teoremi della geometria, e come valore aggiunto ci aiuta a volte a capire come funziona il mondo reale, anche se questo non era certo il suo scopo primario.

Un'osservazione analoga, ma con diverse conseguenze: trovare una soluzione approssimata del problema della trisezione è semplice, basta stabilire in anticipo la tolleranza accettabile. Se ad esempio la soluzione è esatta a meno di un millesimo dello spessore di una matita, per un grafico la cosa diventa del tutto irrilevante. Ma per un matematico no: la trisezione *ideale* è esatta. Dunque, alla domanda: «È possibile dividere *esattamente* con riga e compasso un angolo qualunque in tre parti?» si deve rispondere necessariamente di no.

C'è chi pensa che una negazione non si possa dimostrare, ma i matematici sanno bene che questa è una sciocchezza. Le proposizioni negative, poi, hanno un fascino tutto loro, specialmente quando per dimostrarle sono necessari metodi nuovi e potenti, assai piú interessanti delle eventuali soluzioni. Se qualcuno inventa un sistema di grande utilità in grado di separare gli oggetti costruibili con riga e compasso da quelli non costruibili, mette a disposizione di tutti una nuova categoria di pensiero, che a sua volta porta a nuovi problemi, nuove soluzioni, nuovi strumenti matematici, nuove teorie.

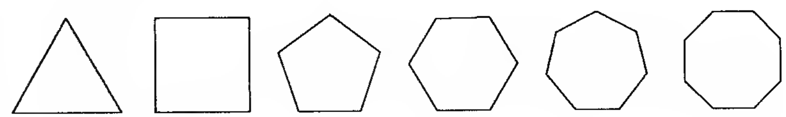
Nessuno può usare un attrezzo non ancora inventato. Se i telefoni non esistono ancora, non possiamo chiamare gli amici; se l'uomo ancora non sa come coltivare gli spinaci o domare il fuoco, non possiamo gustarci un soufflé agli spinaci. Inventare nuovi strumenti è potenzialmente importante quanto risolvere problemi.

La capacità di dividere un angolo in tre parti uguali è strettamente correlata a qualcosa di molto piú interessante: i poligoni regolari.

Un poligono (che in greco significa «con molti angoli») è una figura piana chiusa formata da segmenti, detti lati. Triangoli, quadrati, rettangoli e rombi sono tutti poligoni. Un cerchio invece no, perché i suoi «lati» sono curvi e non rettilinei. Un poligono si definisce regolare se tutti i suoi lati sono uguali tra loro e se tutte le coppie di lati consecutivi si incontrano formando lo stesso angolo. Nella figura 2.6 sono rappresentati dei poligoni regolari con 3, 4, 5, 6, 7 e 8 lati, chiamati rispettivamente triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, ettagono e ottagono. In genere si usano questi termini composti dal numero di lati in greco seguito da -gono, ma per numeri *n* piú grandi è meglio scrivere *n*-gono. Vi potrà sembrare esteticamente sgradevole, ma se con il 17-gono ce la possiamo ancora cavare con «eptadecagono», che dire del 65 537-gono (che ovviamente esiste)?

Sembra che Euclide e i suoi predecessori abbiano riflettuto a lun-

Figura 2.6.
Poligoni regolari.



go sulla possibilità di costruire i poligoni regolari, perché negli *Elementi* ci sono molti esempi al proposito. La questione si rivela essere interessante e decisamente intricata. I Greci conoscevano una procedura per costruire poligoni con questi numeri di lati:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20.

Oggi sappiamo che è *impossibile* costruire con riga e compasso poligoni con questi numeri di lati:

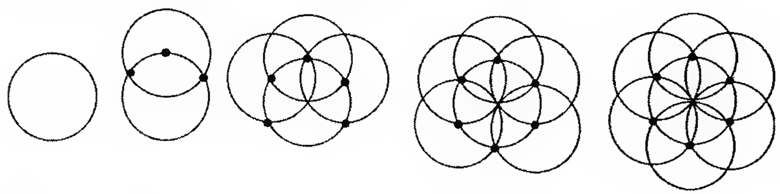
7, 9, 11, 13, 14, 18, 19.

E il 17? L'ho lasciato fuori apposta, perché sarà protagonista tra qualche capitolo e perché è importante nella nostra storia per motivi non solo puramente matematici.

Quando si parla di geometria, nulla aiuta la comprensione piú di qualche figura tracciata sulla carta con una vera riga e un vero compasso, che dia la sensazione di come tutta la teoria stia in piedi. A questo proposito voglio mostrarvi la mia costruzione preferita, l'esagono realizzato con il solo compasso. L'ho imparata da un libro delizioso che mio zio mi regalò negli anni Cinquanta, intitolato *Man Must Measure*. Seguitemi nella figura 2.7.

Fissate il raggio del compasso, che non deve cambiare mai durante tutta la costruzione. Tracciate un cerchio (*a*). Scegliete un punto a

Figura 2.7.
Come costruire un esagono regolare con il solo compasso.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

caso sulla circonferenza e usatelo come centro di un nuovo circolo, che incontrerà quello di partenza in altri due punti (*b*). Ripetete il procedimento per i nuovi punti, ottenendone altri due (*c*). Rifate ancora una volta, e avete in tutto sei punti sulla circonferenza iniziale che, se uniti, formano un esagono regolare (*d*). Non è necessario dal punto di vista matematico, ma è graficamente gradevole completare la figura tracciando il cerchio centrato nell'ultimo punto (*e*), formando cosí una specie di fiore. Notate che i sei circoli si incontrano tutti nel centro di quello di partenza.

Per la sua costruzione Euclide usa un metodo analogo, piú semplice ma non cosí bello da vedere, e *dimostra* che in quel modo ottiene effettivamente un esagono regolare. Se volete controllare, è la Proposizione 15 del Libro IV.

Capitolo terzo

Il poeta persiano

> Il chiaro di luna ha forato di luce la veste alla Notte:
> Bevi vino un istante, ché meglio non troverai piú mai.
> Sta' lieto e di nulla ti cura, ché molti chiari di luna,
> Solitaria di noi, ancora illumineranno la Terra[1].

Ai piú, il nome di Omar Khayyâm fa pensare a un poeta persiano, autore di celebri quartine. Ma questo signore merita un posto di primo piano soprattutto nella storia della matematica: è infatti tra i maggiori esponenti della scuola arabo-persiana, che raccolse il testimone lasciato cadere dai Greci e continuò a produrre ricerche in un periodo in cui l'Occidente, avvolto nelle tenebre dell'età piú oscura, si dedicava a dispute teologiche e non certo a dimostrare teoremi.

Tra i piú grandi successi di Khayyâm c'è la risoluzione delle equazioni cubiche, ottenuta seguendo i rispettabili canoni della matematica greca, senza però la restrizione euclidea relativa a riga e compasso: con questi semplici metodi, infatti, non è possibile arrivare alla soluzione, cosa che già i Greci sospettavano ma che non riuscirono mai a provare, mancanti com'erano del punto di vista algebrico. Il risultato di Khayyâm, comunque, non si allontana troppo dalla tradizione classica, perché fa uso di speciali curve di secondo grado, dette «sezioni coniche», cosí chiamate perché si ottengono dall'intersezione di un cono con vari piani.

È nozione comune nel campo dell'editoria che ogni equazione presente in un libro ne faccia dimezzare le vendite. Se cosí fosse, sarebbe una pessima notizia, perché per farvi capire i punti salienti di ciò che sto scrivendo è davvero necessario che vi mostri qualche equazione. Il capitolo seguente, ad esempio, parla di matematica rinascimentale e della scoperta di alcune formule algebriche in grado di risolvere le cubiche e le quartiche. Quella per la quartica posso anche tralasciarla, ma la formula risolutrice della cubica devo proprio farvela vedere, anche solo per un'occhiata. Altrimenti dovrei limitarmi a scrivere cose del tipo: «Moltiplicate un numero per qualche altro numero, poi aggiungetene degli altri, prendete la radice quadrata del tutto, aggiungeteci un altro numero e infine prendetene la radice cubica; arrivati a questo punto, dovete ripetere il procedimento con dei numeri un po' diversi e sommare le due radici cubiche risultanti. Ah, dimenticavo, ci sono anche delle divisioni da fare».

C'è chi ha sfidato questa presunta legge di mercato e ha scritto libri interi dedicati a una o piú equazioni, seguendo il vecchio adagio dello *show business* che recita: «Se hai una gamba di legno, non nasconderla ma fa' che si veda bene». In un certo senso, anche il libro che avete fra le mani tratta dello stesso argomento; ma come la lettura di un saggio sulle montagne non richiede per forza di essere alpinisti esperti, cosí in queste pagine parlerò di equazioni senza chiedervi in alcun modo di imparare a risolverle. E visto che il lettore di un libro di alpinismo ci capirebbe ben poco se non avesse mai visto una montagna in vita sua, ecco che diventa utile, sia per me sia per voi, mostrarvi qualche equazione in carne e ossa.

Mi sono imposto una regola di base che vi favorisce sfacciatamente: le *mostrerò* soltanto, non vi chiederò di farci nulla. Quando lo reputerò necessario, smonterò un'equazione e vi farò vedere i vari pezzi, spiegandovi quali sono importanti per la nostra storia. Prometto che non vi chiederò mai di seguirmi in qualche calcolo, e in generale che cercherò di evitare le formule quanto piú possibile.

Però lasciatemi dire che, quando le conoscete un po' meglio, le equazioni si rivelano creature molto amichevoli. Sono limpide, concise, a volte anche eleganti. In verità costituiscono un linguaggio semplice e preciso con cui descrivere certe «ricette di calcolo». Nel caso in cui sia possibile descrivere queste ricette a parole, non temete, lo farò. In alcune rare occasioni, però, l'uso del linguaggio ordinario porta a tali impicci che dovrò per forza ricorrere ai simboli.

I segni piú importanti che dovete imparare per leggere questo libro sono tre, e qui vi parlo dei primi due. Uno è il nostro vecchio amico x, l'«incognita». Sta per un numero ancora ignoto, il cui valore dobbiamo trovare in un modo o nell'altro.

Il secondo è un numerino a mezz'aria, come ^{2} o ^{3}, che si chiama «esponente» ed è un'abbreviazione per «moltiplica il numero qui a sinistra per se stesso, tante volte quanto vale il numerino». Dunque 5^3 sta per $5 \times 5 \times 5 = 125$, e x^2 significa $x \times x$. Se l'esponente è 2 diciamo che il numero o l'incognita è «elevata al quadrato», o semplicemente «al quadrato»; per 3 usiamo «al cubo» e poi andiamo avanti: «alla quarta», alla «quinta» ecc. In queste ultime espressioni si sottintende la parola «potenza».

Non chiedetemi perché si chiamino potenze, non ne ho la piú pallida idea. E comunque, devono pur avere un nome, no?

Il metodo babilonese per la soluzione delle equazioni quadratiche fu appreso (o reinventato) dai Greci. Ad esempio negli scritti di Erone, vissuto ad Alessandria in un periodo imprecisato compreso tra il 100 a. C. e il 100 d. C., si trova un problema tipicamente babilonese, discusso con terminologia greca. Una evoluzione si ebbe attorno al 100 d. C., quando Nicomaco, probabilmente un siriano della Giudea, scrisse la sua *Introduzione all'aritmetica*, in cui abbandonava la tradizione, non trattando piú i numeri obbligatoriamente come lunghezze, aree o volumi, ma come semplici numeri. Nicomaco era di scuola pitagorica, e il suo lavoro riflette questo orientamento: tratta solo di numeri interi e dei loro rapporti e non fa uso di simboli. Il suo libro sarebbe diventato il testo di base sull'aritmetica per almeno un millennio.

Il simbolismo matematico fa la sua comparsa attorno al 500 d. C. nell'opera di Diofanto, studioso di cui non sappiamo nulla se non che visse una lunga vita, e anche questo dato proviene da una fonte dubbia. Si legge infatti in una raccolta di problemi di poco posteriore: «Diofanto passò 1/6 della sua vita come fanciullo, e dopo 1/12 gli spuntò la barba. Dopo 1/7 si sposò, e dopo 5 anni gli nacque un figlio, che visse metà degli anni del padre. Il padre morí 4 anni dopo il figlio. Quanti anni visse Diofanto?»

Che vogliate usare i metodi contorti di quell'antico trattato o il piú moderno calcolo simbolico, la risposta che si ottiene è 84. Un'età veneranda, sempre che il problema tragga spunto dalla realtà, il che è opinabile.

Null'altro ci è noto della sua vita, mentre il suo lavoro ha lasciato molte piú tracce, grazie alle copie e ai commenti di epoche posteriori. Diofanto scrisse un trattato sui numeri poligonali, in parte conservato, in cui utilizza il metodo euclideo della deduzione rigorosa a partire da postulati; il suo valore matematico, però, è scarso. Assai piú importanti sono i tredici libri dell'*Aritmetica*, di cui sei sono sopravvissuti grazie a una copia del XIII secolo (basata a sua volta su una copia). In un manoscritto ritrovato in Iran ne sono stati scoperti altri quattro, ma non tutti gli specialisti sono convinti della loro autenticità.

L'*Aritmetica* si presenta come un lungo elenco di problemi, e infatti nella prefazione Diofanto sostiene di averla scritta come libro di esercizi per i suoi studenti. Nei calcoli fa uso di vari simboli speciali per l'incognita e le sue potenze, che sembrano derivate dall'abbreviazione di *dynamos* (forza) e *kybos* (cubo); la notazione, comunque, non è molto strutturata. L'addizione si scrive semplicemente ponendo due simboli uno accanto all'altro, come oggi facciamo per la moltiplicazione, e c'è un segno diverso per la sottrazione. C'è addirittura un equivalente del nostro «=», anche se c'è chi pensa che sia stato introdotto da copisti di epoca posteriore.

L'*Aritmetica* si occupa soprattutto di risoluzione di equazioni. Nel primo libro che ci è pervenuto si trattano quelle di primo grado, negli altri quelle di secondo, anche in piú incognite, e alcuni casi particolari di terzo. La caratteristica principale di questo trattato è che le soluzioni sono sempre numeri interi o razionali, tanto che oggi chiamiamo *diofantea* o *diofantina* un'equazione in cui cerchiamo solo valori di questo tipo. Ecco un tipico problema diofanteo: «Trovare tre numeri tali che la loro somma e la somma di tutte le possibili coppie sia sempre un quadrato perfetto». Se volete cimentarvi, sappiate che non è affatto facile. Diofanto fornisce come soluzione 41, 80 e 320; in effetti $41 + 80 + 320 = 441 = 21^2$, $41 + 80 = 121 = 11^2$, $41 + 320 = 361 = 19^2$, $80 + 320 = 400 = 20^2$. Ingegnoso, no?

Le equazioni diofantee hanno un ruolo fondamentale nella moderna teoria dei numeri. Il celeberrimo «ultimo teorema» di Fermat è proprio un problema di questo tipo: asserisce che la somma di due cubi perfetti non può essere un cubo perfetto, la somma di due quarte potenze non può essere una quarta potenza, e cosí via in generale per tutte le potenze maggiori di 2 (per 2 siamo nel caso pitagorico: $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$ ecc.). Pierre de Fermat scribacchiò la sua congettura attorno al 1650, non fornendone la dimostrazione, sul margine di una copia proprio dell'*Aritmetica* di Diofanto. Ci sono voluti quasi 350 anni perché l'inglese Andrew Wiles riuscisse a provarlo in modo inequivocabile.

Le tradizioni in matematica possono durare davvero a lungo.

L'algebra fece il suo vero debutto in scena nell'830, quando l'azione si era già trasferita dal mondo greco a quello arabo. In quell'anno l'astronomo Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî scrisse un trattato intitolato *Al-jabr w'al muqâbala*, che si può tradurre all'incirca come «ristabilire e semplificare», parole che rimandano alle tradizionali operazioni con cui si riduce un'equazione alla sua forma piú semplice. Da *al-jabr*, per inciso, deriva il termine «algebra». La prima traduzione latina, del XII secolo, porta il titolo *Ludus Algebrae Almucgrabalaeque*.

Nel trattato di al-Khowârizmî, dedicato alla risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado, si possono riscontrare influenze greche e babilonesi, oltre a metodi sviluppati in India da Brahmagupta attorno al 600. I suoi successori trattarono anche alcuni casi speciali di cubiche; tra questi ricordiamo Tâbit ibn Qorra, medico, astronomo e filosofo pagano vissuto a Baghdad, e al-Hasan ibn al-Haytham, nato a Bassora e morto in Egitto, noto in Occidente come Alhazen. E naturalmente il piú famoso di tutti, Omar Khayyâm.

Il suo vero nome era Ghiyât al-Din Abû'l-Fath Umar ibn Ibrâhim al-Nîsâburî al-Khayyâmi (le ultime due parole significano letteralmente «costruttore di tende», che secondo alcuni studiosi si riferirebbe al mestiere del padre Ibrâhim). Nacque in Persia nel 1047 e trascorse gran parte della sua vita a Nishapur, oggi Neyshabur, città dell'Iran nordorientale nella provincia di Khorosan, vicino al confine con il Turkmenistan.

Secondo la tradizione, in gioventú Omar lasciò il paese natio per studiare il Corano sotto la guida del famoso *imam* Mowaffak di Nishapur. Lí strinse amicizia con due altri studenti, Hasan Sabah e Nizâm al-Mulk, con cui fece un patto: chiunque dei tre fosse diventato ricco e famoso (il che non era improbabile per i discepoli di Mowaffak) avrebbe dovuto condividere denaro e gloria con gli altri.

Gli studi finirono, gli anni passarono, il patto rimaneva in vigore. Nizâm si diresse verso Kabul; Omar, meno ambizioso, si mise per qualche tempo a fabbricare tende, altra possibile spiegazione del suo nome. La matematica e le scienze in genere divennero la sua passione, cui dedicava gran parte del tempo libero. Dopo qualche anno Nizâm tornò a casa e si assicurò un incarico governativo, come amministratore locale per conto del sultano Alp Arslâm.

Ora che era ricco e potente, Nizâm doveva mantenere la parola data nei confronti di Omar e Hasan. Chiese allora il permesso al sultano di aiutare i suoi amici e questi glielo concesse. A Hasan fu assegnato un impiego governativo ben pagato, mentre a Omar, il cui unico desiderio era continuare gli studi a Nishapur, fu concessa una gratifica perenne, a patto che continuasse a pregare per la salute di Nizâm.

Dopo qualche tempo Hasan tentò di fare le scarpe a un superiore e perse il posto. Omar dal canto suo proseguiva sereno le sue ricerche, fino a quando fu nominato membro di una commissione per la riforma del calendario. All'epoca, il calendario persiano era strettamente solare, dunque la data del primo giorno dell'anno non era fissa, il che creava confusione. Razionalizzare il sistema era compito di un capace matematico, e Omar fece buon uso delle sue cognizioni aritmetiche e astronomiche per compiere l'impresa.

Attorno a quel periodo iniziò anche a comporre le sue quartine, poi raccolte sotto il nome di *Robâ'iyyât*. Un *robâi* era una composizione in quattro versi con una particolare metrica, che poteva assumere due forme distinte. Tra le sue creazioni, una sembra fare riferimento al suo lavoro di riforma del calendario:

> Da questo opaco pianeta di terra fino al culminar di Saturno
> Spiegati e risolti ho tutti i problemi del Cosmo.
> Con aguzzo ingegno disciolsi i piú difficili nodi.
> Ed ogni nodo è ora aperto: ma non il Nodo di Morte[2].

Gran parte dei suoi versi ha un sapore pagano e celebra il vino e l'ebbrezza dei sensi:

> Mi leverò, e al Vino correrò, deciso e leggero,
> E la guancia mia colorerò del colore del mosto.
> A questa sciocca Ragione sferrerò sulla faccia
> Un pugno di Vino, che l'addormenti alfine a lungo sonno[3].

Alcuni sono criptici e allegorici:

> Quando l'ebbro Usignolo trovò la via del Giardino
> E ridente trovò il volto della Rosa e la Coppa

> Venne e in misterioso bisbiglio mi disse all'orecchio:
> «Considera bene: la vita trascorsa mai piú, mai piú non si trova»[4].

In certe composizioni Omar sembra farsi beffe della religione. Chissà cosa ne pensava il sultano che gli pagava il vitalizio, o il suo vecchio maestro *imam*.

Nel frattempo, Hasan era caduto in disgrazia e costretto all'esilio da Nishapur. Iniziò a frequentare cattive compagnie e, grazie alla sua intelligenza e istruzione, divenne il capo di una banda criminale. Nel 1090 i banditi, sotto il suo comando, si impadronirono della fortezza di Alamut sulle montagne dell'Elburz, subito a sud del Mar Caspio, e da lí si misero a terrorizzare la regione. Hasan divenne noto come il Vecchio della Montagna e i suoi seguaci come *Hashishiyun*, a causa del loro uso di hashish. Erano specializzati in omicidi politici mirati, tanto che dal loro nome derivò poi la parola «assassino». Quindi Hasan riuscí a diventare ricco e potente a modo suo, degno discepolo di Mowaffak; non era però disposto a dividere alcunché con i vecchi amici.

Mentre Omar era alle prese con tavole astronomiche ed equazioni cubiche, Nizâm continuò la sua carriera politica, fino a quando, per colmo dell'ironia, fu assassinato dai banditi di Hasan. Secondo la tradizione Khayyâm morí nel 1123 a settantasei anni, e Hasan l'anno successivo a ottantaquattro. Gli *Hashishiyun* continuarono a seminare il panico fino all'arrivo dei Mongoli, che conquistarono la fortezza di Alamut nel 1256.

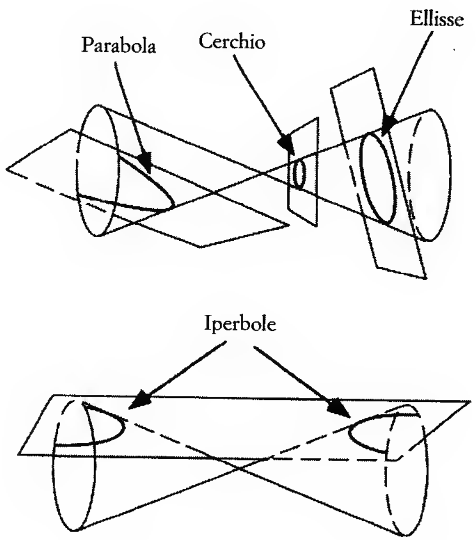
Ma torniamo alla matematica. Attorno al 350 d. C. il greco Menecmo aveva scoperto certe curve particolari dette *sezioni coniche*, o semplicemente coniche, che secondo gli storici erano utilizzate per risolvere il problema della duplicazione del cubo. Archimede ne perfezionò lo studio e Apollonio da Perga sistematizzò i risultati nel suo libro intolato, per l'appunto, *Le coniche*. Ciò che maggiormente interessava a Omar Khayyâm di queste ricerche era il fatto che grazie a tali curve si potevano risolvere alcune equazioni di terzo grado.

Le coniche si chiamano cosí perché si ottengono dall'intersezione di un piano con un cono, o meglio con un cono circolare retto. Dal punto di vista matematico, questo solido è un luogo formato dall'unione di tutte le rette che congiungono un punto dato (il vertice) con tutti i punti di una circonferenza assegnata (la base). E visto che per i Greci le rette idealmente si estendono all'infinito, possiamo prolungarle anche dall'altra parte del cerchio, ottenendo un doppio cono come in figura 3.1.

Le sezioni coniche si dividono in tre famiglie: *ellissi*, *parabole* e *iperboli*. L'ellisse è una curva chiusa che si ottiene quando il piano secante è tale da intersecare solo uno dei due coni; il cerchio ne è un caso particolare, che capita quando il piano è parallelo alla base. Un'iperbole è fatta di due curve aperte simmetriche, ottenute tagliando il cono con un piano che lo interseca da entrambe le parti. La parabola, infine, è una curva aperta che in un certo senso è una via di mezzo tra ellisse e iperbole, ottenuta con un piano secante parallelo a una delle rette che giacciono sulla superficie del cono.

A distanze molto grandi dal vertice, l'iperbole si avvicina indefinitamente a due rette, parallele alle intersezioni tra il cono e un piano passante per il suo vertice. Queste rette si dicono *asintoti*.

Figura 3.1.
Le sezioni coniche.



Lo studio sistematico delle coniche costituí il piú importante avanzamento della geometria greca oltre il sistema euclideo. Queste curve sono ancora oggi molto importanti, ma per motivi assai diversi. Dal punto di vista algebrico, sono il passo successivo alle rette, cioè sono curve di secondo grado. Dal punto di vista della matematica applicata, descrivono i moti dei corpi celesti; le orbite dei pianeti attorno al Sole sono ellissi, come Keplero dedusse dalle osservazioni di Tycho Brahe, che Newton tradusse nella sua famosa legge gravitazionale dell'inverso del quadrato. Tutto ciò fece capire che l'universo, per certi aspetti, esibiva una regolarità matematica: l'astronomia si aprí a nuove possibilità grazie al fatto che i suoi fenomeni divennero computabili.

Gran parte delle opere matematiche di Khayyâm che ci sono pervenute sono dedicate alla teoria delle equazioni. Per lui esistevano due tipi di soluzioni: quelle intere, nella tradizione di Diofanto, che chiamava «algebriche» (oggi diremmo aritmetiche) e quelle «geometriche», che si potevano costruire come segmenti, aree o volumi.

Facendo uso a profusione delle sezioni coniche, Omar trovò le soluzioni geometriche di tutti i tipi di cubiche e le raccolse nella sua *Algebra* del 1079. Poiché ai suoi tempi i numeri negativi non erano considerati veri numeri, doveva manipolare le equazioni in modo da avere solo termini positivi, il che portò a una proliferazione di casi particolari che oggi ci sembrano inutili, visto che cambia soltanto il segno. Nella sua opera Omar distingue tra ben quattordici tipi diversi, a seconda dei termini che appaiono ai due lati del segno di uguale:

cubo = quadrato + lato + numero
cubo = quadrato + numero
cubo = lato + numero
cubo = numero
cubo + quadrato = lato + numero
cubo + quadrato = numero
cubo + lato = quadrato + numero
cubo + lato = numero
cubo + numero = quadrato + lato

cubo + numero = quadrato
cubo + numero = lato
cubo + quadrato + lato = numero
cubo + quadrato + numero = lato
cubo + lato + numero = quadrato

In tutti i casi i coefficienti dovevano essere positivi. Vi chiederete forse perché manchino tipologie come cubo + quadrato = lato: perché si possono dividere tutti i termini per l'incognita e ricondursi a un'equazione quadratica.

Omar non inventò da solo tutte le soluzioni, ma si basò piuttosto su metodi greci precedenti, che sviluppò in modo sistematico fino ad arrivare a trattare tutti i quattordici tipi. In epoche piú remote erano note le soluzioni per alcuni casi particolari, che usavano però metodi *ad hoc* con diverse costruzioni geometriche; nessuno prima di lui era riuscito a classificare tutte le possibili equazioni in forme canoniche, né tantomeno a darne metodi generali di soluzione. «Io, al contrario, – scrive, – non ho mai smesso di cercare un modo per conoscere, con esattezza, tutti i possibili casi, e distinguere tra questi i possibili dagli impossibili». Per lui «impossibili» erano i casi senza radici positive.

Per avere un'idea dei suoi metodi, presento qui la sua soluzione del problema «cubo piú lati piú numeri uguali ai quadrati», cioè in forma moderna:

$$x^3 + bx + c = ax^2.$$

(Poiché a noi non interessa che tutti i termini siamo positivi, oggi la scriveremmo probabilmente cosí: $x^3 + bx + c - ax^2 = 0$).

Omar ci fornisce questa ricetta, che possiamo seguire nella figura 3.2:

a) Disegniamo tre segmenti di lunghezza c/b, $\sqrt{b}$, a, disponendoli in modo perpendicolare.

b) Tracciamo un semicerchio di diametro $a + c/b$, prolunghiamo il segmento verticale e segniamo la sua intersezione con la circonferenza. Se il prolungamento è lungo d, tracciamo perpendicolarmente un segmento lungo $cd/\sqrt{b}$.

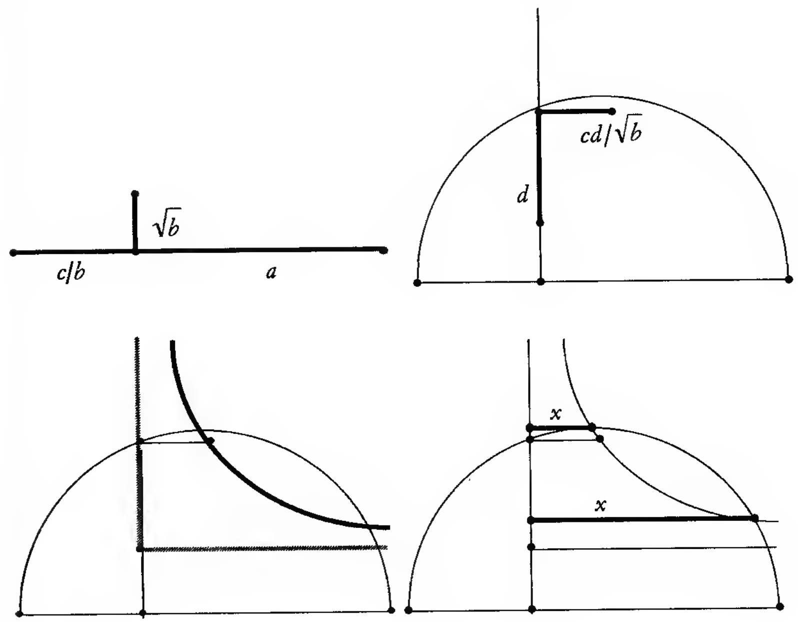
c) Tracciamo un'iperbole (disegnata con tratto scuro) che abbia come asintoti le rette tratteggiate e passi per il punto trovato al passo precedente.

d) I punti di intersezione tra iperbole e semicerchio dànno le soluzioni (positive) cercate x, qui segnate con un tratto scuro.

I dettagli, come spesso accade, sono meno importanti dello stile, che è semplice ed elegante: basta fare qualche costruzione euclidea con riga e compasso, aggiungere alla ricetta una sezione conica e con poche manipolazioni il gioco è fatto.

Nel suo trattato Khayyâm fornisce soluzioni analoghe per tutti i quattordici tipi, corredate di dimostrazioni. C'è comunque qualche falla: non sempre i punti richiesti dalle costruzioni esistono, se certe condizioni sui coefficienti a, b e c non sono soddisfatte. Nell'esempio

Figura 3.2.
La soluzione delle equazioni cubiche con il metodo di Khayyâm.



appena visto, tanto per dirne una, può accadere che iperbole e cerchio non abbiano punti in comune. Ma a parte questi dettagli, il suo lavoro è davvero completo e di grande valore.

Nelle sue quartine a volte compaiono accenni alla scienza e alla matematica, con una vena autoironica e antintellettuale. Ad esempio:

> Le forme apparenti dell'Essere conosco e del Nulla,
> E l'intimo senso d'ogni cosa ch'è bassa conosco e ch'è alta;
> Ma tutta questa mia scienza mi sa di vergogna,
> Se saprò mai d'uno stato che sia superiore all'Ebbrezza![5]

In una quartina particolarmente toccante si sentono gli echi del celebre mito platonico della caverna:

> Questa gran volta del cielo sotto la quale stupiti viviamo
> È come una lanterna, magica d'illusione:
> Il Lume dentro n'è il Sole, e la lanterna il Mondo;
> E noi come forme fuggenti, sbigottiti, passiamo[6].

Di queste «forme fuggenti», dei simboli algebrici ma anche delle nostre fragili vite, Omar Khayyâm fu un grande cantore.

[1] O. Khayyâm, *Quartine (Robâ'iyyât)*, a cura di A. Bausani, Einaudi, Torino 1956, 1979, p. 73 [*N. d. T.*].
[2] *Ibid.*, p. 43.
[3] *Ibid.*, p. 45.
[4] *Ibid.*, p. 11.
[5] *Ibid.*, p. 80.
[6] *Ibid.*, p. 44.

Capitolo quarto
Il biscazziere filosofo

> Io vi giuro, ad Sacra Dei Evangelia, e da real gentil'huomo, non solamente da non publicar giamai le vostre inventioni, se me le insegnate, ma anchora vi prometto, e impegno la fede mia da real Cristiano, da notarmele in zifera [codice], acciochè dopo la mia morte alcuno non le possa intendere[1].

Questo solenne giuramento, a quanto pare, fu pronunciato nel 1539. L'Italia del Cinquecento brulicava di fermenti innovativi, da cui anche la matematica seppe trarre beneficio. Nello spirito iconoclastico dell'epoca, i dotti rinascimentali cercavano in tutti i modi di superare i limiti della scienza medievale. Uno di loro era riuscito a risolvere in via generale la sfuggente equazione cubica e un altro, a suo modo di vedere, gliel'aveva scippata, nonostante il giuramento di cui sopra.

Il matematico furioso per il plagio era Niccolò Fontana, detto Tartaglia; l'accusato era invece Gerolamo Cardano, matematico, medico, uomo irrequieto e giocatore compulsivo. Attorno al 1520, da vero figliol prodigo, era riuscito a dilapidare tutta l'eredità paterna e, trovatosi senza un soldo in tasca, si era messo a giocare d'azzardo per guadagnarsi da vivere, sfruttando le sue conoscenze matematiche per calcolare in modo efficace le probabilità di vincita. La nuova attività lo portava a frequentare ambienti non proprio raccomandabili: una volta, ad esempio, sfregiò col coltello un rivale che a suo dire stava barando.

Non erano tempi facili, e Gerolamo era un vero duro. Ma era anche un pensatore molto originale, autore di un trattato di algebra tra i piú letti e celebrati della storia.

La sua vita ci è nota con dovizia di particolari, perché nel 1575 Cardano finì di scrivere la sua autobiografia in latino, poi pubblicata postuma. Ecco come inizia:

> Di tutti i beni che gli uomini possono conseguire nessuno sembra piú desiderabile che la conoscenza della verità. E poiché nessuna azione umana è al sicuro

dalla calunnia, seguendo l'esempio di un uomo universalmente ritenuto grande e saggio, il filosofo Antonino, mi accingo a scrivere la storia della mia vita. Dichiaro solennemente di non volere aggiungere al vero né vanagloria né abbellimenti, ma solo di esporre, raggruppandoli e collegandoli fra loro, eventi e fatti di cui furono testimoni anche i miei scolari [...]

Eccovi dunque la mia biografia, scritta alla buona, senza la pretesa di insegnare: essa si limita a raccontare la mia vita[2].

Come molti matematici dell'epoca, era esperto di astrologia ed era dunque in grado di farsi l'oroscopo da solo:

> Mi raccontarono che mia madre aveva tentato, ma invano, di sbarazzarsi di me ricorrendo a medicamenti abortivi. Io nacqui il 24 settembre del 1501 quando mancava meno di mezz'ora, ma piú di venti minuti alla prima ora della notte [...] Marte rendeva funesto l'influsso del Sole e della Luna per il contrasto dei luoghi e per la quadratura con la Luna [...] ma siccome il luogo della congiunzione precedente era stato nel ventinovesimo grado della Vergine, che è dominato da Mercurio, e poiché né questo, né il luogo della Luna né quello dell'ascendente è il medesimo, né sta di fronte alla penultima parte della Vergine, avrei dovuto essere mostruoso; anzi era facile che uscissi a brani dal ventre materno, e infatti ci mancò poco.
>
> Comunque, venni alla luce, o per essere piú esatti fui strappato dal grembo materno come morto, coi capelli neri e crespi. Rinacqui con un bagno di vino caldo, che per un altro avrebbe potuto esser fatale. Mia madre era stata travagliata per ben tre giorni; comunque, riuscii a venire al mondo[3].

In un capitolo della sua autobiografia Cardano ricapitola tutte le opere da lui scritte; l'elenco si apre con l'*Ars Magna*, uno dei tre trattati di argomento matematico ivi ricordati, e continua con libri di astronomia, fisica, filosofia morale, gemmologia, idrologia, medicina, divinazione e teologia.

Di questa cospicua produzione, solo il primo saggio ha valore per la nostra storia, e il perché ce lo spiega il suo titolo completo: *Artis Magnae, sivi de regulis algebricis, liber unus* (letteralmente, «Un libro sulla Grande Arte, ovvero sulle regole dell'algebra»). Si tratta di una raccolta di metodi risolutivi per vari tipi di equazioni; non solo quadratiche, già note ai Babilonesi, ma soprattutto cubiche e quartiche, le cui formule generali erano state appena scoperte. Sono soluzioni puramente algebriche, che non fanno uso di metodi geometrici come le coniche di Omar Khayyâm.

Nel capitolo precedente vi ho presentato due dei tre simboli matematici essenziali per la lettura di questo libro: l'incognita e l'esponente, come in $x^3 = x \times x \times x$. Ora faremo la conoscenza con il terzo.

Graficamente è molto piacevole ed è fatto cosí: $\sqrt{\ }$. Si legge «radice quadrata di»; ad esempio $\sqrt{9}$ è la radice quadrata di 9, cioè quel numero che moltiplicato per se stesso dà 9, ed è ovvio che in questo caso $\sqrt{9} = 3$, perché $3 \times 3 = 9$ (certo, non è sempre cosí facile da calcolare). La radice piú nota della storia della matematica è $\sqrt{2}$, che secondo una leggenda assai improbabile procurò al suo scopritore, Ippaso di Metaponto, il dubbio onore di essere gettato in mare da una barca. La sua espressione decimale è infinita, e inizia cosí:

1,4142135623730950488.

Se eleviamo al quadrato questo numero otteniamo:

1,99999999999999999999522356663907438144

che ovviamente non è uguale a 2.

Il simbolo di radice ha una storia nota. È una modifica grafica della lettera «r», iniziale della parola latina *radix* che vuol dire, appunto, «radice».

In modo analogo si possono definire le radici cubiche, quarte, quinte ecc., annotate ponendo l'esponente appropriato a sinistra del segno di radice:

$\sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[5]{\ }, \ldots$

Come si intuisce, la radice cubica di un numero è quel valore che elevato al cubo dà il numero stesso; analogamente per le radici quarte, quinte ecc. Dunque $\sqrt[3]{8} = 2$, perché $2^3 = 8$. Anche la radice cubica di 2, come quella quadrata, ha un'espressione decimale infinita, che inizia cosí:

1,259921049894873 1648

e continua fino a quando avete pazienza, senza arrestarsi mai. È proprio questo numero che salta fuori nell'antico problema della duplicazione del cubo.

Dopo la fine del v secolo, il centro della matematica mondiale si spostò dal mondo ellenistico a est, verso l'Arabia, l'India e la Cina. L'Europa precipitò nei secoli oscuri del Medioevo; oggi sappiamo che non furono poi cosí bui, ma di certo non lasciavano filtrare molta luce. La diffusione del cristianesimo ebbe come spiacevole effetto collaterale una concentrazione del sapere in chiese e monasteri, dove il clero si mise a copiare diligentemente i grandi trattati classici, tra cui quello di Euclide, senza però capirci molto. Per darvi un'idea di quanto le conoscenze fossero degradate, i Romani sapevano calcolare come scavare le due estremità di una galleria per farle incontrare a metà strada, mentre gli agrimensori sassoni dovevano usare una mappa a grandezza naturale dei campi per raccapezzarsi nelle misure: persino il concetto di «scala» si era perso. Se gli antenati degli Inglesi avessero voluto realizzare una carta precisa della loro nazione, avrebbero dovuto usare un foglio grande come la nazione stessa (all'epoca circolavano anche mappe in scala, ma molto approssimative).

Alla fine del xv secolo l'Europa aveva riconquistato la palma della supremazia matematica. L'Oriente perdeva terreno e il Vecchio Continente viveva una seconda giovinezza, cercando di liberarsi dall'abbraccio del cattolicesimo e dalle sue paure del nuovo. Paradossalmente, il centro della rinascita intellettuale fu proprio l'Italia, millenaria sede della Chiesa di Roma.

L'onda lunga della scienza e della matematica europea si può far risalire a qualche secolo prima, precisamente al 1202, anno in cui apparve il *Liber abaci* del mercante Leonardo da Pisa, assai piú noto come Fibonacci («figlio di Bonaccio» – anche se lo pseudonimo pare sia stato inventato di sana pianta nell'Ottocento). Suo padre Guglielmo gestiva il fondaco pisano a Bugia, in Algeria, attività che deve averlo messo in contatto con mercanti di varie culture, e soprattutto con il nuovo sistema numerico indoarabo, predecessore di quello decimale, che presto insegnò al figlio. Leonardo scrisse che l'istruzione paterna gli era stata cosí gradita da spingerlo a continuare gli studi matematici durante i suoi viaggi d'affari in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, tutti luoghi dove intrattenne dotte dispute con gli studiosi locali.

Il titolo del libro è fuorviante, perché sembra indicare un manuale di istruzioni per l'uso dell'abaco, l'antico strumento di calcolo fatto di biglie o di sassi. Ma proprio come il termine latino *calculus*, in origine «sassolino», passò per traslato a significare il procedimento in cui si utilizzavano i sassolini stessi, cosí *abacus* finí per indicare l'arte della computazione. Il *Liber abaci* fu il primo testo a introdurre in Europa la numerazione indoaraba e a spiegarne l'utilità pratica illustrandone varie applicazioni, soprattutto in ambito commerciale, come ad esempio per il cambio di valute.

Un problema contenuto nel libro sarebbe diventato celebre. Si ipotizza un modello ideale di crescita di una popolazione di conigli, che produce l'interessante sequenza numerica 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55..., in cui ogni nuovo termine a partire dal 2 è la somma dei due precedenti. Oggi è nota come *successione di Fibonacci* ed è importante non certo per le sue (inesistenti) applicazioni nell'allevamento dei conigli quanto per le molte strutture matematiche che possiede e per il suo ruolo chiave nella teoria dei numeri irrazionali. Leonardo non poteva certo immaginare che questo problemino enigmistico avrebbe eclissato tutto il resto della sua opera.

Fra gli altri libri da lui scritti, si deve ricordare la *Practica geometriae* del 1220, che contiene buona parte degli *Elementi* oltre a varie nozioni di trigonometria di origine greca. Nel Libro X Euclide tratta dei radicali doppi del tipo $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, che Leonardo dimostrò essere inadeguati per la soluzione delle equazioni cubiche. Ciò non provava che le stesse non fossero risolubili con riga e compasso, perché non escludeva altre combinazioni di radicali, ma fece comunque suonare un campanello d'allarme sull'inadeguatezza dei metodi euclidei.

Nel 1494 Luca Pacioli raccolse gran parte della conoscenza matematica di allora nella sua *Summa*, dove trovano posto l'esposizione del sistema numerico indoarabo, cenni di matematica finanziaria, un riassunto di Euclide e la trigonometria tolemaica. Ricorre in tutto il testo il tema della proporzione e del mirabile disegno della Natura, che si estrinseca in pagine dedicate alla figura umana, alla prospettiva in pittura e alla teoria dei colori.

L'esposizione dell'algebra di Pacioli è tradizionalmente retorica, cioè descrive le equazioni a parole senza far quasi uso di simboli. L'incognita era allora indicata come «cosa» e i matematici dell'epoca spesso sono noti come «cossisti». Le poche abbreviazioni utilizzate da Pacioli sono di derivazione diofantea, che lo studioso tenta, senza troppo successo, di migliorare. Morris Kline, nella sua monumentale storia della matematica, fa notare in modo molto appropriato che «è molto significativo per giudicare gli sviluppi matematici dell'aritmetica e dell'algebra tra il 1200 e il 1500 il fatto che la *Summa* di Pacioli contenga quasi niente di piú del *Liber abaci* di Leonardo Pisano [...] In effetti l'aritmetica e l'algebra si basano completamente sul libro di Leonardo»[4].

Alla fine della sua opera, Pacioli osservava che sulla duplicazione del cubo allora si sapeva poco, cosí come sulla quadratura del cerchio. Ma le cose sarebbero presto cambiate. Il primo grande passo in avanti fu compiuto una trentina d'anni piú tardi, nel nuovo secolo, e all'inizio fu accolto dall'indifferenza generale.

Gerolamo Cardano era il figlio illegittimo di un leguleio milanese, Fazio, e della giovane vedova Chiara Micheria, che dal precedente matrimonio aveva avuto altri tre figli. Nacque nel 1501 a Pavia, nel territorio del ducato di Milano, perché la famiglia stava cercando di sfuggire all'epidemia di peste che imperversava nel capoluogo lombardo. I tre fratellastri rimasti a Milano, purtroppo, morirono prima di aver avuto il tempo di scappare.

Racconta Gerolamo nella sua autobiografia:

> Mio padre, contrariamente alla foggia della città, andava sempre vestito di rosso, ma portava una cappa nera [...] Dai cinquantacinque anni fu completamente sdentato. Era grande studioso di Euclide e aveva le spalle curve [...]
>
> Mia madre era facile all'ira, dotata di buona intelligenza e buona memoria, piccola di statura, grassoccia e molto religiosa. Entrambi i miei genitori erano irascibili...[5]

Fazio era un uomo di legge, ma aveva comunque una notevole cultura matematica, tanto da dare lezioni di geometria a Leonardo da Vinci. Aveva una cattedra all'Università di Pavia e insegnava anche in una istituzione milanese, le Scuole Piatti. Anche il figlio illegittimo beneficiò della sua scienza:

> Mio padre nella prima infanzia mi insegnò alla buona i primi elementi di aritmetica e poi, a circa nove anni, mi istruí in quelle scienze occulte, che non so dove avesse apprese. Poco dopo mi insegnò l'astrologia araba [...] Dopo i dodici anni mi insegnò i primi sei libri di Euclide[6].

Il ragazzo aveva qualche problema di salute e non si lasciava convincere a occuparsi degli affari di famiglia. Dopo qualche insistenza, ottenne di poter studiare medicina all'Università di Pavia, anche se il padre avrebbe preferito che si iscrivesse a legge.

Nel 1494 Carlo VIII di Francia aveva invaso l'Italia, dando inizio a un periodo di guerre e scaramucce che sarebbe durato per una cinquantina d'anni. Durante una fase di intense ostilità l'Università di Pavia fu costretta a chiudere i battenti e Gerolamo dovette trasferirsi a Padova. A giudicare dai documenti era davvero bravo, tanto che alla morte di Fazio poté candidarsi come presidente degli studenti. Anche se non era amato da tutti, per via della sua estrema franchezza, riuscí comunque a farsi eleggere con il margine di un solo voto.

È a questo punto che si mise a fare la bella vita, a scialacquare l'eredità paterna e a giocare d'azzardo, vizio che l'avrebbe accompagnato per tutta la sua turbolenta vita. A sentir lui, ne combinava di tutti i colori:

> Dapprima mi dedicai a ogni tipo di scherma, tanto che presso i migliori schermitori contavo qualcosa [...]
>
> Nelle città dove abitavo, di notte solevo girare armato, anche contro i decreti delle autorità locali. Di giorno uscivo armato con delle suole di piombo del peso di otto libbre; di notte col volto coperto da un velo di lana nero e con scarpe di feltro.
>
> A volte seguitavo a esercitarmi nelle armi per molti giorni dalla mattina alla sera, poi, tutto sudato, davo di piglio agli strumenti musicali. Spesso andavo girovagando tutta la notte fino al mattino[7].

Doveva essere davvero un tipo singolare.

Ottenuto il titolo di studio nel 1525, Cardano cercò di entrare nel Collegio dei Fisici di Milano ma fu respinto, sulla carta in quanto figlio illegittimo, in realtà per via della sua famigerata mancanza di diplomazia. Non potendo far parte di quel consesso, si adattò a praticare come medico generico nel vicino abitato di Sacco. I soldi però scarseggiavano. Piú o meno nello stesso periodo sposò Lucia Bandarini, figlia di un capitano della milizia, e tentò di nuovo il trasferimento a Milano, che gli avrebbe assicurato un maggior reddito, ma ancora una volta il Collegio respinse la sua domanda. Impossibilitato a fare il medico senza morir di fame, si mise a giocare per soldi. Ma neppure la sua abilità matematica lo salvò da forti perdite:

> Elogi forse non ne merito per nessuna delle mie azioni, ma quello che è certo, e sono io il primo a riconoscerlo, è che merito biasimo per essermi dedicato cosí smodatamente agli scacchi e ai dadi. Ho giocato per molti anni agli uni e agli altri: a scacchi per piú di quaranta, a dadi per circa venticinque; e non solo ho giocato per tanti anni, ma quel che è veramente vergognoso, tutti i giorni, perdendo insieme reputazione, tempo e denaro[8].

Dopo aver portato al monte dei pegni i mobili e i gioielli di Lucia, la famiglia finí in un ospizio per poveri. La carriera medica avrebbe potuto essere prestigiosa e remunerativa, ma invece di onori e guadagni per il momento erano arrivate solo sconfitte. Poi finalmente nacque il primo figlio:

> Prima mia moglie per due volte di seguito ebbe aborti di sesso maschile al quarto mese di gravidanza, tanto che già cominciavo a disperare di avere figli e anche a sospettare un maleficio, quando finalmente ci nacque un bambino [...] era sordo dall'orecchio destro [...] nel piede sinistro, se non sbaglio, aveva due diti attaccati tra loro [...] il dorso era un po' curvo, ma non deforme. Visse tranquillo fino a ventitre anni; poi si innamorò di Brandonia de' Serono e la sposò, per quanto non avesse dote[9].

A questo punto il defunto padre venne, postumo, in soccorso della giovane famiglia. Il posto di Fazio all'università, rimasto vacante, fu assegnato a Gerolamo che si assicurò un reddito fisso, integrandolo con qualche consulto medico, che in teoria non avrebbe potuto offrire perché non iscritto al Collegio. Tuttavia, grazie ad alcune guarigioni miracolose (colpi di fortuna, probabilmente, visto lo stato delle conoscenze mediche all'epoca), la sua fama come dottore si diffuse. Addirittura, qualche membro del Collegio sottopose i propri casi alla sua consulenza, tanto che la strada alla sospirata ammissione sembrava finalmente spianata. Ma ancora una volta la sua eccessiva franchezza gli si ritorse contro: fece pubblicare un pamphlet in cui sferrava un attacco al vetriolo nei confronti di un celebre membro dell'istituzione e nuovamente, nel 1537, la sua domanda fu respinta. Pare che Cardano

non si rendesse bene conto dei danni che questo atteggiamento gli procurava, perché nella sua autobiografia si vanta di aver sempre preferito l'onestà e la verità alla prudenza.

Alla fine, però, la sua reputazione divenne tale che il Collegio dovette cedere e ammetterlo due anni dopo. Il vento sembrava cambiare a suo favore e la carriera di Gerolamo avanzava su vari fronti, con la pubblicazione di due libri di matematica.

Piú o meno in quegli stessi anni, Tartaglia fece una grande scoperta: un metodo generale di soluzione delle equazioni cubiche. Con riluttanza, e dopo una tenace opera di convincimento, mise a parte Cardano del suo tesoro. Comprendiamo certo la sua ira funesta quando, sei anni piú tardi, ricevette una copia dell'*Ars Magna* e scoprí che il collega non si era fatto scrupolo di divulgare ai quattro venti la sua formula.

A dire il vero Cardano non si era attribuito il merito della scoperta, come è chiaro fin dalla prima pagina del suo trattato:

> Il nostro contemporaneo Scipione Del Ferro scoprí una formula per il caso in cui il cubo piú la prima potenza è uguale al numero. Era un lavoro assai pregevole e degno di nota [...] Con lui si contende il titolo Niccolò Tartaglia di Brescia, nostro amico, che, sfidato dallo studente di Del Ferro di nome Antonio Maria Fior, riuscí a risolvere lo stesso problema per non venir sconfitto, e dopo richieste ripetute nel tempo mi trasmise la sua soluzione.

Ciò nonostante, era frustrante per Tartaglia veder spiattellato ai quattro venti il suo segreto, tanto piú in un libro pubblicato a nome del piú famoso Cardano, che di sicuro sarebbe stato associato in futuro a quella scoperta.

Questa, almeno, è la versione dei fatti data da Tartaglia ed è praticamente l'unica che possediamo. Come fa notare Richard Witmer, curatore dell'edizione inglese dell'*Ars Magna*, «dipendiamo quasi esclusivamente dal materiale pubblicato da lui in vita, che come si può facilmente immaginare non è del tutto obiettivo». Un domestico di Cardano, Ludovico Ferrari, sostenne in seguito di essere stato presente all'incontro tra i due colleghi-rivali, durante il quale il suo datore di lavoro non fece alcuna promessa di segretezza. Anche questa però non è una testimonianza molto imparziale, tanto piú che Ferrari divenne in seguito allievo di Cardano e finí per scoprire, da solo o con la collaborazione di altri, la formula risolutiva per le equazioni di quarto grado.

La questione della paternità non era puramente formale, ma aveva risvolti economici. Nel Rinascimento un abile matematico poteva mettere a frutto le sue formule e scoperte segrete in due modi: con il gioco d'azzardo o con i cartelli di sfida.

Oggi forse non riusciamo a immaginare una competizione matematica che attrae un largo pubblico, ma nel Cinquecento succedeva regolarmente. I dotti dell'epoca guadagnavano discrete sommette sfidandosi periodicamente in pubblici duelli («cartelli di sfida») in cui ognuno poneva all'avversario una serie di problemi; chi ne risolveva il maggior numero era il vincitore. Erano spettacoli forse meno emozionanti del pugilato a mani nude, ma gli spettatori potevano comunque fare scommesse. Oltre a un premio in denaro, chi vinceva si assicurava fama e discepoli paganti. Era dunque un'attività doppiamente remunerativa.

Tartaglia non era stato il primo a trovare una soluzione in forma algebrica delle equazioni cubiche. L'onore spetta a Scipione del Ferro, professore bolognese che pervenne alla formula risolutrice attorno al 1515. Morí nel 1526, lasciando i suoi scritti e la sua cattedra universitaria in eredità al genero, Annibale della Nave. Le sue carte andarono poi perdute e furono ritrovate solo attorno al 1970 nella biblioteca dell'Università di Bologna, grazie agli sforzi di Ettore Bortolotti e colleghi. Secondo questo studioso, è probabile che del Ferro conoscesse i metodi per risolvere tre tipi di equazioni, anche se ne divulgò solo uno, quello per cubo piú incognita uguale a numero.

Della Nave e lo studente Antonio Maria Fior fecero circolare questa soluzione. Quest'ultimo, in particolare, la trasformò in un efficace strumento di promozione per la sua carriera matematica, sfidando pubblicamente Tartaglia a un «match di cubiche» nel 1535.

Le voci sull'esistenza di un metodo di risoluzione circolavano da anni, eccitando l'immaginazione dei matematici, che sono particolarmente spinti a lavorare quando sanno che un certo problema ha di sicuro una soluzione: non correndo il rischio di perdere tempo dietro a una questione senza speranza, l'unica incognita rimane la propria abilità – e in genere i matematici hanno molta autostima e fiducia nei propri mezzi, anche se non sempre questa si rivela giustificata.

Tartaglia aveva riscoperto autonomamente il metodo di del Ferro, ma sospettava che Fior fosse riuscito in qualche modo a scoprire la formula anche per altri tipi di cubiche, trovandosi cosí in forte vantaggio nella sfida. Come ci racconta nei suoi scritti, la preoccupazione lo spinse a lavorare senza posa, riuscendo finalmente a risolvere i casi che ancora rimanevano oscuri poco tempo prima della data fissata per il duello. Armato dei suoi nuovi strumenti algebrici, spazzò via senza problemi lo sfortunato Fior.

La voce si sparse e arrivò fino a Cardano, che all'epoca stava lavorando al suo trattato di algebra. Come ogni studioso che si rispetti, voleva che il libro fosse il piú possibile aggiornato, con i metodi piú recenti, senza i quali sarebbe stato obsoleto ancor prima di uscire dalla tipografia. Si presentò quindi a Tartaglia, nella speranza di apprendere i suoi segreti, ma questi rifiutò dicendo che li avrebbe divulgati lui stesso nel suo libro, a cui stava lavorando.

Sembra però che alla fine l'insistenza del medico milanese abbia avuto la meglio. Non conosciamo tuttavia le condizioni dell'accordo: è vero che Tartaglia fece giurare a Cardano di non parlarne a nessuno, pur sapendo che questi stava componendo il suo trattato? o semplicemente si arrese al potere di persuasione del rivale, per poi pentirsene?

Fatto sta che l'uscita dell'*Ars Magna* lo fece infuriare. Un anno dopo (1546) diede alle stampe il suo libello *Quesiti et inventioni diverse*, in cui si scagliava con forza contro Cardano, arrivando a pubblicare tutta la loro corrispondenza (ufficialmente senza correzioni di sorta) per mostrare al mondo la verità.

Nel 1547 Ferrari corse in aiuto del maestro con un cartello di pubblica sfida nei confronti di Tartaglia, a cui era concessa la scelta delle armi, cioè l'argomento del contendere. Il premio per il vincitore sarebbe stato di 200 scudi. Che Ferrari difendesse l'onore di Cardano era molto chiaro fin dal testo della sfida: «Mi offerisco [...] a disputar in luogo egualmente commodo, dinanti a giudici idonei, publicamente con voti [...] Et questo propongo per farvi conoscere che indegnamente et falsamente havete detto et scritto ciò che ritorna in biasimo del antedetto Signor Hieronimo, il quale a pena siete degno di nominare»[10].

Il cartello circolò tra molti dotti e accademici italiani. Nel giro di nove giorni Tartaglia rispose con la sua versione dei fatti, a cui seguí una controrisposta, e poi altre ancora: in totale i due rivali si scambiarono dodici cartelli in diciotto mesi. La disputa sembrava seguire le regole classiche del duello: all'offeso si concedeva la scelta delle armi; ma anche se l'offensore era stato ufficialmente Ferrari, Tartaglia continuava a chiedere di scontrarsi con Cardano.

Dando prova di sangue freddo, Ferrari non cedette, replicando che in ogni modo i metodi usati da Tartaglia erano stati trovati da Scipione del Ferro; e poiché quest'ultimo non si era mai lamentato dello scippo, non vedeva il motivo di tutto questo agitarsi. Era un argomento convincente, che forse fece breccia nello stesso Tartaglia, al punto da fargli prendere in considerazione l'ipotesi di un ritiro. Alla fine, però, si presentò alla sfida, spinto forse dalla necessità di fare bella figura con i maggiorenti di Brescia, la sua città, dove stava cercando di assicurarsi un posto da professore.

La disputa si tenne nell'agosto 1548, in una chiesa milanese, di fronte alla folla delle grandi occasioni. Non ci è giunto nessun resoconto di quella giornata, tranne una breve nota di Tartaglia secondo la quale tutto finí poco prima dell'ora di cena (quindi fu probabilmente breve e poco avvincente, per gli standard dell'epoca). Sembra comunque che Ferrari abbia vinto a mani basse, perché subito dopo ottenne varie cariche onorifiche e il posto di esattore fiscale della città, accumulando quindi una notevole fortuna. Tartaglia invece non fece menzione dell'esito della sfida, tornò a mani vuote a Brescia e trascorse gli ultimi anni della sua vita tra continue recriminazioni.

La sfida era impari, perché Cardano e Ferrari, all'insaputa del rivale, erano stati a Bologna a esaminare le carte di del Ferro, dove avevano trovato la prima vera formula risolutiva per le equazioni cubiche. In seguito sostennero che le fonti del materiale contenuto nell'*Ars Magna* erano proprio queste, e non le comunicazioni personali di Tartaglia a Cardano, a cui si accennava solo per dare conto di come l'autore avesse appreso dell'esistenza del metodo.

La storia ha una coda sorprendente. Subito dopo la seconda edizione dell'*Ars Magna*, nel 1570, Cardano fu arrestato dall'Inquisizione. Il motivo potrebbe sembrare futile: non il contenuto del libro ma la sua dedica a un intellettuale relativamente poco noto, Andreas Osiander, figura minore della Riforma, sospettato di essere l'anonimo prefatore del *De revolutionibus* di Copernico, in cui per la prima volta si sosteneva l'eretica ipotesi dell'eliocentrismo. La stessa teoria avrebbe fatto altre vittime in seguito: nel 1600 Giordano Bruno fu bruciato vivo, appeso nudo a testa in giú sul rogo, a Campo dei Fiori; nel 1616 e nel 1633 Galileo sfuggí allo stesso destino, ma fu comunque condannato agli arresti domiciliari.

Per renderci meglio conto dell'impresa di questo gruppo di matematici italiani dobbiamo tornare alle tavolette babilonesi e alla loro soluzione delle equazioni quadratiche. Se traduciamo in simboli moderni questa antica ricetta, troviamo che l'anonimo scriba, posto di fronte al problema di risolvere $x^2 - ax = b$ se la cavava con la formula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$$

equivalente a quella che tutti imparano (o imparavano) a memoria a scuola. Oggi la trovate in un qualsiasi formulario.

Per i dotti rinascimentali, la soluzione della corrispondente equazione cubica $x^3 + ax = b$, scritta in forma moderna, era:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

È la formula piú complessa che vedrete scritta in questo libro (anche se in matematica c'è molto di peggio, credetemi). Per arrivare a comprenderla, bisogna parlare un po' di vari concetti algebrici. Osserviamo subito che fa uso di tutti e tre i simboli finora introdotti: lettere al posto di numeri, esponenti e radici, sia quadrate sia cubiche. Non è necessario che capiate ogni sfumatura di questa formula, né tantomeno che vi mettiate a usarla per fare calcoli, ma è bene che ne apprezziate la struttura. Devo prima fornirvi qualche termine tecnico che ci sarà utile qui e in seguito.

Un'espressione algebrica formata dall'addizione di varie potenze dell'incognita, come ad esempio $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 9$ si dice *polinomio*, dall'espressione greca che significa «molti termini». I numeri per cui sono moltiplicate le varie potenze, in questo caso 2, −7, −4 e 9, si dicono *coefficienti*. La potenza piú alta a cui è elevata l'incognita è il *grado* del polinomio, in questo caso 4. Per i polinomi di grado 1, 2 e 3 ci sono nomi speciali: rispettivamente lineare, quadratico e cubico. Meno diffusi sono i termini quartico e quintico per quelli di grado 4 e 5. Le soluzioni dell'equazione associata, in cui si impone che tutto sia uguale a zero, $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 9 = 0$, sono dette *radici* del polinomio.

Ora possiamo esaminare in dettaglio la formula di Cardano. È costruita a partire dai coefficienti a e b, con operazioni elementari (addizioni, sottrazioni e divisioni per i numeri 2, 4 e 27) e altre piú esoteriche. Ci sono infatti due estrazioni di radice quadrata (anzi, la stessa radice è usata due volte, una volta con il segno + e l'altra con il segno −) e due estrazioni di radici cubiche, operate su espressioni che contengono a loro volta radici. Quindi, a meno di innocue operazioni che trasformano un po' i coefficienti, la soluzione è: «Prendi una radice quadrata, poi quella cubica; rifallo; aggiungi i due termini».

È veramente il minimo indispensabile per andare avanti. Non credo che avrei potuto semplificare la trattazione piú di cosí.

Cardano e i suoi colleghi, però, non si accorsero subito che la loro formula funzionava non solo per la cubica del tipo $x^3 + ax = b$, ma *in tutti i casi*, a meno di semplici manipolazioni algebriche. Bastarono comunque pochi anni perché la cosa diventasse universalmente nota. Cominciamo dal termine cubico; se ha un coefficiente, ad esempio $5x^3$, basta dividere tutta l'equazione per 5, e i matematici del Rinascimento erano abbastanza abili da accorgersene. Un caso piú delicato, la cui soluzione richiese una piccola rivoluzione nel modo di concepire i numeri, si dà quando i coefficienti a e b sono negativi: semplicemente accettando l'esistenza di numeri minori di zero, usandoli senza problemi nella formula, evitiamo inutili e complesse distinzioni di casi. Infine, per far sparire l'eventuale termine quadratico basta applicare un trucchetto algebrico, sostituendo a x l'espressione «x + costante opportunamente scelta» e facendo bene i conti. Anche qui, considerare i valori negativi come numeri a tutti gli effetti ci semplifica la vita. Infine, nel Rinascimento ci si preoccupava dei termini «mancanti», ma oggi possiamo evitare di distinguere casi e sottocasi, ammettendo che il coefficiente a volte sia semplicemente uguale a zero. La formula vista sopra continua a valere.

Tutto a posto, dunque?

Non proprio: ho un po' barato.

Ho detto che la formula di Cardano risolve tutti i tipi di cubica, il che in un certo senso non è vero. L'entità di questa bugia dipende interamente da cosa si intende per «soluzione», ed è un importante distinguo.

Lo stesso Cardano si accorse del problema, il che testimonia quanto fosse attento ai particolari. Le cubiche in genere (se ammettiamo i numeri negativi) hanno tre soluzioni o una sola. Nel caso in cui le soluzioni siano tre la formula sembra fornire valori insensati, perché ci si ritrova con un numero negativo sotto il segno di radice quadrata.

Nello specifico, Cardano vide che l'equazione $x^3 = 15x + 4$ aveva ovviamente soluzione $x = 4$, ma applicando la sua formula otteneva:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

che per un matematico del Rinascimento era un'espressione priva di senso.

All'epoca i numeri negativi erano accettati da pochi ardimentosi, perlomeno in Europa, visto che in Oriente la questione sembrava risolta da parecchio tempo. Già nel V secolo, infatti, i giainisti indiani avevano un'idea rudimentale della faccenda, mentre i matematici cinesi del 1200 usavano un sistema di conto in cui i numeri positivi erano rappresentati da bastoncini neri e quelli negativi da bastoncini rossi (anche se in contesti ben delimitati).

Se i numeri negativi erano visti con sospetto, figuratevi le loro radici quadrate. Per ottimi motivi che qui non spiegherò (vi basti sapere che è l'unico modo per rendere coerenti i calcoli algebrici) il quadrato di un numero, positivo o negativo che sia, è sempre positivo. Anche i piú audaci matematici dell'epoca, disposti ad accettare quantità negative, dovevano dunque arrendersi di fronte a un'espressione come quella vista sopra: la radice quadrata di una quantità minore di zero era un oggetto privo di senso.

Eppure la formula portava a ciò. La cosa era tanto piú grave se si teneva conto che una soluzione c'era comunque, ed era nota, ma sembrava sfuggire.

Nel 1539 un turbato Cardano aveva sollevato la questione in una lettera a Tartaglia:

> Di molte altre lettere [...] ancor non siete dignato di rescrivermi, e tanto piú io vi ho mandato addomandare la resolutione di diversi quesiti alli quali non mi haveste risposto, e tra li altri quello di cubo uguale a cose [...] ho inteso tal regola, ma quando che il cubo della terza parte delle cose eccede il quadrato della metà del numero allora non posso farli seguir la equatione come appare[11].

La condizione sui coefficienti evidenziata da Cardano è esattamente quella per cui sotto la radice quadrata compare un valore positivo, ed è evidente che la materia gli era ben nota, tanto da riuscire a trovarne i punti critici. Non altrettanto chiaro è il grado di comprensione di Tartaglia, che replicò al rivale dicendogli, in poche parole, che non aveva capito nulla della regola e che le sue osservazioni erano del tutto sbagliate.

Forse lo faceva apposta, rifiutandosi in modo deliberato di aiutare Cardano. O forse, semplicemente, non capiva dove l'altro volesse andare a parare. Fatto sta che il medico milanese aveva messo il dito su una piaga che avrebbe stimolato gli ingegni matematici nei successivi duecentocinquant'anni.

Già all'epoca ci si rendeva conto che il problema era di quelli importanti. Nell'*Ars Magna* Cardano discute un caso singolare. Se cerchiamo due numeri la cui somma è 10 e il cui prodotto è 40, otteniamo la «soluzione» $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$; osserva l'autore che se tralasciamo la questione del *significato* di un oggetto come $\sqrt{-15}$ e lo trattiamo come un qualsiasi altro numero, effettivamente la soluzione soddisfa le condizioni date. Facendo la somma i due radicali di segno opposto si cancellano, $5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$, mentre per il prodotto si ha che $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$. I conti tornavano, ma Cardano non sapeva che farsene: per lui era un chiaro esempio di «sottigliezza aritmetica», dal risultato elegante quanto inutile.

Nella sua *Algebra* del 1572, il bolognese Raffaele Bombelli annotò altri casi simili e si accorse che manipolando le radici «immaginarie» come se fossero veri numeri, la strana espressione vista sopra portava al risultato corretto $x = 4$. Nel suo libro, scritto durante il tempo libero che gli lasciava l'incarico di agrimensore della Camera Apostolica (in pratica il ministero dell'Economia del papa), Bombelli svolse i calcoli e si accorse che:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$
$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

e che dunque sommando le due strane radici cubiche si otteneva il valore corretto:

$$(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Il valore insensato assumeva dunque un senso e portava alla risposta giusta. Bombelli fu probabilmente il primo ad accorgersi della possibilità di fare calcoli algebrici con le radici di numeri negativi, ottenendo valori utili. Era un forte indizio del fatto che tali strani numeri si potevano interpretare in qualche modo, anche se allora non si aveva idea del come.

Il vertice matematico dell'*Ars Magna* sta un grado piú su della cubica, cioè nella formula risolutrice per le equazioni di quarto grado. Ludovico Ferrari, lo studente di Cardano che abbiamo già incontrato, riuscí in qualche modo a estendere i metodi del suo maestro e di Scipione del Ferro fino ad arrivare alla formula corretta, che contiene solo radici quadrate e cubiche (la radice quarta non è che la radice di una radice quadrata).

Non si affrontano, nello stesso trattato, le equazioni di quinto grado. Pochi allora dubitavano del fatto che prima o poi l'ingegno umano avrebbe trovato una formula risolutrice per quel caso, che di sicuro sarebbe stata ancora piú complessa e intricata (probabilmente avrebbe richiesto radici quinte).

Quanto a Cardano, trovò altri modi di occupare il tempo, ritornando alle sue svariate attività, soprattutto alla pratica medica. La sua vita privata, nel frattempo, veniva sconvolta da una serie di fatti atroci:

> Mio figlio [minore] fu accusato di aver propinato il veleno alla moglie e, per di piú, durante il puerperio: fu arrestato il 17 febbraio e dopo cinquantatre giorni, il 13 aprile, fu decapitato in carcere. [...]
>
> Dal primogenito avevo avuto due nipoti: ma la sua casa in pochi giorni vide tre funerali: quello di mio figlio, di mia nuora e della nipotina Diaregina, e poco mancò non morisse anche il mio nipotino[12].

Eppure Gerolamo rimase sempre un inguaribile ottimista, fiducioso nella natura umana e felice delle sue molte doti e fortune.

[1] Tartaglia 1546, c. 124*r*.
[2] Cardano 1575, pp. 3-4.
[3] *Ibid.*, pp. 7-8.
[4] Kline 1972, trad. it. p. 278.
[5] Cardano 1575, pp. 9-10.
[6] *Ibid.*, p. 103.
[7] *Ibid.*, pp. 23-24.
[8] *Ibid.*, p. 56.
[9] *Ibid.*, p. 67.
[10] L. Ferrari e N. Tartaglia, *Cartelli di sfida matematica. Riproduzione in facsimile delle edizioni originali, 1547-1548*, a cura di A. Masotti, in «Supplementi e commentari dell'Ateneo di Brescia», 1974, p. 7 [*N. d. T.*].
[11] Tartaglia 1546, c. 125*v*.
[12] Cardano 1575, pp. 67-68.

Capitolo quinto
La volpe che non lasciava tracce

Quale strada intraprendere, cosa studiare? Il ragazzo aveva una passione per due diverse materie e la scelta si stava rivelando un dilemma. Era il 1796 e Carl Friedrich Gauss, un brillante diciannovenne, cercava di prendere la decisione piú importante della sua vita, quella relativa alla futura carriera. Nonostante fosse nato in una famiglia di mezzi limitati, il giovane sentiva di poter raggiungere fama e gloria. Tutti ne convenivano, compreso il duca di Brunswick, di cui Gauss era suddito. Il problema era la sua eccessiva versatilità, che lo portava a essere abile in molte materie. Ora però doveva scegliere tra i suoi due amori, la matematica e la linguistica.

Il 30 marzo di quell'anno, però, la questione si risolse da sé, grazie a una scoperta strana, importante e del tutto inaspettata. Quel giorno Gauss trovò una costruzione con riga e compasso del poligono regolare con 17 lati.

Poteva forse sembrare un risultato esoterico, ma fu come un fulmine a ciel sereno, non deducibile dai trattati classici. In Euclide si trovavano metodi per costruire poligoni con 3, 4, 5 e 6 lati, che combinati portavano a 8, 10, 12, 15 ecc.

Ma 17 era un valore inconcepibile. Eppure il metodo era corretto, e Gauss ne conosceva con sicurezza il motivo, che si riconduce a due semplici proprietà di quel numero: è primo, cioè è divisibile solo per se stesso e 1, ed è piú grande di un'unità rispetto a una particolare potenza di 2, in quanto $17 = 16 + 1 = 2^4 + 1$.

Se anche voi foste geni come Gauss, capireste perché queste banali affermazioni conducano logicamente all'esistenza di una costruzione con riga e compasso del poligono con 17 lati. E nemmeno se foste stati uno dei grandi matematici vissuti tra il 500 a. C. e il 1796 avreste mai sospettato un collegamento tra fatti in apparenza tanto diversi. Eppure è cosí.

Se il giovane avesse avuto bisogno di una conferma del suo talento, quella scoperta lo fu certamente. Si decise dunque a diventare un matematico.

La famiglia Gauss si era trasferita a Brunswick (in tedesco: Braunschweig) nel 1740, all'epoca in cui il nonno di Carl era stato assunto in loco come giardiniere. Uno dei suoi tre figli, Gebhard Dietrich, ne aveva ereditato il mestiere, anche se per arrotondare all'inizio faceva mille altri lavoretti occasionali, come il muratore e il bracciante; in seguito lo troviamo «addetto al controllo delle acque», segretario di un mercante e tesoriere di una piccola compagnia di assicurazione. All'epoca, i commerci piú redditizi erano controllati da gilde e corporazioni locali, a cui gli immigrati, anche quelli di seconda generazione come Gebhard, non avevano possibilità di accedere. Altre notizie sulla sua vita: sappiamo che ebbe due mogli, che sposò la seconda, Dorothea Benze, figlia di uno scalpellino, nel 1776 e che suo figlio Johann Friedrich Carl (che in seguito si sarebbe fatto chiamare Carl Friedrich) nacque l'anno seguente.

Gebhard era un uomo onesto ma testardo, irascibile e non troppo brillante. Dorothea invece era intelligente e sicura di sé, caratteristiche che mise a buon frutto nell'allevare il piccolo Carl. Il bimbo aveva a malapena due anni, ma già la donna aveva capito che suo figlio era fuori dal comune e che era suo dovere assicurargli la miglior istruzione possibile, in modo da far sbocciare i suoi talenti. Il padre, invece, sarebbe stato piú contento se l'erede fosse diventato muratore. Per fortuna, grazie alla madre, le cose andarono diversamente. Quando Carl aveva diciannove anni, l'amico Wolfgang Bolyai disse a Dorothea che suo figlio sarebbe diventato il piú grande matematico d'Europa, e la donna scoppiò in lacrime dalla gioia. Anche grazie a lei, la profezia si sarebbe presto avverata.

Carl fu sempre grato alla madre di tanta devozione. La tenne con sé in casa negli ultimi vent'anni della sua vita, mentre la vista di lei peggiorava fino a che divenne completamente cieca. Era un uomo famoso e rispettato, eppure volle prendersi cura di lei personalmente, facendole da infermiere fino alla sua morte, nel 1839.

Le capacità di Gauss si mostrarono al mondo molto presto. Aveva tre anni quando, mentre osservava il padre che come caposquadra stava consegnando le paghe settimanali agli operai, si accorse di un errore di calcolo e lo fece notare allo strabiliato Gebhard. Nessuno gli aveva mai insegnato a far di conto, cosa che evidentemente aveva appreso da solo.

Qualche anno piú tardi il suo maestro, tale J. G. Büttner, assegnò alla classe un esercizio lungo e noioso, che nelle sue intenzioni doveva tenere occupati i ragazzi per un bel po', garantendogli qualche ora di meritato riposo. Non siamo certi di cosa si trattasse, ma doveva essere simile al calcolare la somma di tutti i numeri da 1 a 100. O meglio, era sicuramente la somma di una progressione aritmetica, una sequenza di numeri che aumentavano in modo costante, cioè tali che la differenza tra due valori consecutivi fosse sempre uguale. Esiste una semplice formula per la somma di n termini in una progressione aritmetica, che però non è autoevidente e va appresa; di certo, quella classe elementare non la conosceva e non poteva far altro che mettersi a sommare faticosamente i numeri a uno a uno.

Questa, perlomeno, era la speranza di Büttner. Disse agli scolari di mettersi al lavoro e di scrivere il risultato sulla loro lavagnetta, che avrebbero dovuto consegnare alla fine del compito posandola sulla cattedra. Mentre i compagni erano intenti a scribacchiare lunghe liste:

$$1 + 2 = 3$$
$$3 + 3 = 6$$
$$6 + 4 = 10$$
$$10 + 5 = 14$$

(è inevitabile, i ragazzini fanno errori di calcolo), il piccolo Gauss ci pensò su un istante, poi prese la lavagna, ci scrisse sopra un numero e si avviò baldanzoso verso la cattedra, dove consegnò il compito.

«Ecco fatto», disse. Tornò al banco e si sedette.

A fine lezione l'insegnante verificò i risultati scritti sulle lavagnette e vide che solo una mostrava il valore corretto: quella di Gauss.

Non possiamo sapere con certezza cosa fosse frullato per la mente del bambino prodigio, ma c'è una plausibile ricostruzione del suo metodo di calcolo. Probabilmente, o Gauss aveva già riflettuto su casi analoghi ed era pervenuto alla formula, oppure ci aveva pensato sul momento, accorgendosi del semplice trucco (ne era perfettamente capace). Un modo intuitivo per capire come stanno le cose è accoppiare i numeri della progressione prendendone uno in testa e uno in coda: 100 e 1, 99 e 2, 98 e 3, e cosí via fino a 50 e 51. In questo modo si esauriscono tutti i numeri contandoli una sola volta, quindi la somma di queste coppie moltiplicata per il numero delle coppie ci dà il risultato cercato: poiché $100 + 1 = 99 + 2 = \ldots = 101$ e ci sono 50 coppie, la risposta è $101 \times 50 = 5050$. Era questo il numero scritto dal piccolo Carl sulla lavagnetta.

Il succo della storia non è tanto dimostrare l'abilità aritmetica di Gauss, che comunque era notevole (piú avanti con gli anni, impegnato in calcoli astronomici giganteschi che comportavano valori con molte cifre decimali, avrebbe dimostrato la stessa velocità e precisione di un *idiot savant*), quanto il suo talento nell'accorgersi della struttura nascosta negli oggetti matematici, per criptica che fosse, e nello sfruttarla ai fini della risoluzione.

Büttner fu talmente sbalordito dall'episodio che regalò al giovane allievo il miglior testo di aritmetica a sua disposizione. Nel giro di una settimana, Gauss si era già avventurato in territori dove il maestro non era in grado di seguirlo.

Il caso volle che Büttner avesse un assistente, il diciassettenne Johann Martin Bartels, il cui compito ufficiale era temperare le penne d'oca dei ragazzi e aiutarli a usarle in modo corretto. Privatamente, il giovane era appassionato di matematica. Quel ragazzino prodigio di dieci anni lo affascinava; fu l'inizio di un'amicizia durata tutta la vita, e di una mutua collaborazione in cui i due studiosi si incoraggiarono sempre a vicenda.

Bartels conosceva bene alcuni maggiorenti di Brunswick, che informò della presenza nella loro città di un genio nascosto, la cui famiglia era sulla soglia della povertà. Uno di questi gentiluomini, il dotto consigliere Eberhard Zimmerman, presentò Gauss al duca Carlo Guglielmo Ferdinando nel 1791. Il duca lo accolse con affetto, impressionato dalle sue virtú, e si assunse l'onere della sua istruzione, come faceva a volte con i figli piú dotati delle famiglie meno abbienti.

Quello per la matematica non era l'unico talento esibito dal ragazzo. Mostrava anche una predisposizione alle lingue classiche; a quindici anni, nel 1792, sempre con il generoso aiuto finanziario del duca, entrò nel Collegium Carolinum, il locale *Gymnasium* (una scuola superiore – a pagamento – che preparava all'università con particolare enfasi sulle materie umanistiche). Molti articoli celebri di Gauss, da lí in poi, sarebbero stati scritti in latino.

Nel campo matematico le sue ricerche continuavano. A diciassette anni aveva già scoperto un sorprendente teorema di teoria dei numeri noto come «legge della reciprocità quadratica», che stabilisce un'elementare ma inaspettata struttura nella divisibilità dei quadrati perfetti. La legge era già stata notata da Eulero, ma Gauss non poteva saperlo: la scoperta fu del tutto indipendente. A molti studiosi la questione non sarebbe nemmeno venuta in mente. Nel frattempo il ragazzo stava facendo riflessioni molto profonde sulla teoria delle equazioni, che lo avrebbero portato alla costruzione del 17-gono regolare e quindi messo sulla strada della gloria immortale.

Tra il 1795 e il 1798 Gauss studiò all'Università di Gottinga, sempre a spese del duca Ferdinando. I pochi amici che si fece in quegli anni gli sarebbero rimasti cari per tutta la vita. Fu lí, ad esempio, che incontrò Bolyai, un esperto di geometria già famoso che lavorava nel solco della tradizione euclidea.

Le intuizioni matematiche balzavano in mente a Gauss in modo tanto veloce e urgente che a volte gli sembrava di esserne sopraffatto. Quando una nuova idea gli passava per la testa, gli capitava di smettere di colpo ciò che stava facendo e di stare a lungo immobile con lo sguardo perso nel vuoto. Un giorno ad esempio si mise a pensare a quali teoremi sarebbero stati ancora validi se la geometria euclidea non fosse stata vera. Ma la sua principale occupazione dell'epoca era terminare l'opera imponente che stava scrivendo, le *Disquisitiones arithmeticae*, praticamente pronta già nel 1798. Prima di darla alle stampe, tuttavia, Gauss voleva esser certo di aver riconosciuto il giusto credito a tutti i suoi predecessori; allo scopo, si chiuse nella famosa biblioteca specialistica dell'Università di Helmstedt, curata dal celebre Johann Pfaff, all'epoca il piú noto matematico di Germania.

Dopo vari frustranti rinvii dell'editore, nel 1801 l'opera venne pubblicata. La prima pagina conteneva una dedica, senza dubbio sincera, piena di riconoscenza nei confronti del duca Ferdinando, la cui generosità non era finita con gli studi universitari: fece infatti pubblicare a sue spese la tesi di dottorato che Gauss aveva nel frattempo discusso a Helmstedt. E quando il giovane Carl manifestò qualche preoccupazione economica per il suo futuro, gli conferí una borsa per permettergli di continuare senza ostacoli le sue ricerche.

La caratteristica saliente delle *Disquisitiones* è il loro stile asciutto e rigoroso. Le dimostrazioni sono accurate, la logica impeccabile, ma Gauss non fa alcuna concessione al lettore, tralasciando di spiegare in che modo è arrivato a certe idee. Piú avanti con gli anni Carl avrebbe giustificato questo atteggiamento, che lo caratterizzò per tutta la vita, con il fatto che «quando si costruisce un edificio elegante, le impalcature alla fine non devono piú essere visibili». Il che è cosa buona e giusta se si vuole che il pubblico ammiri il risultato finale, ma non aiuta nessuno a costruirsene un altro da sé. Carl Gustav Jacobi, che sviluppò certe idee di Gauss nel campo dell'analisi complessa, disse una volta del suo illustre predecessore: «È come la volpe, che cancella le sue tracce sul terreno con la coda».

Piú o meno in quegli anni i matematici si stavano pian piano rendendo conto che i numeri complessi, per quanto artefatti e privi di apparente significato, erano utili in algebra, perché semplificavano in modo elegante il problema della soluzione delle equazioni. Semplicità ed eleganza sono i feticci della matematica, e le idee nuove che promettono di raggiungere o mantenere questi due marchi di fabbrica sono destinate a vincere nel lungo periodo, per quanto strane appaiano all'inizio.

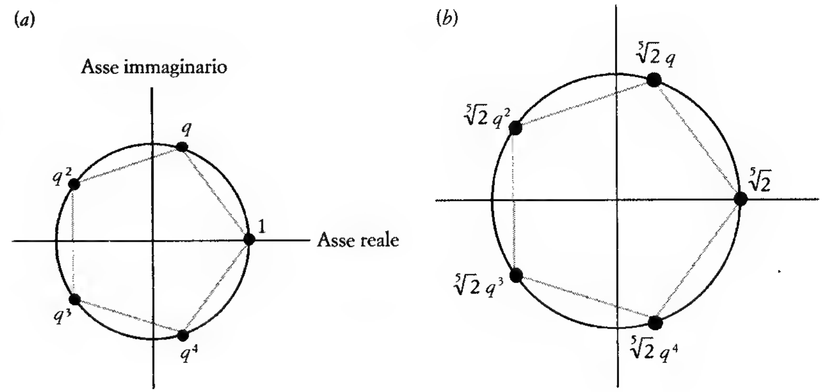
Se ci si limita ai numeri cosiddetti «reali» (quelli tradizionali, diciamo), le equazioni si comportano a volte in modo frustrante. Ad esempio, $x^2 - 2 = 0$ ha due soluzioni distinte, cioè $\sqrt{2}$ con il segno piú e con il segno meno davanti, mentre $x^2 + 1 = 0$, sua quasi gemella come struttura, non ne ha alcuna. Se però accettiamo i numeri complessi, anche questa seconda equazione ha due soluzioni come la prima: i e $-i$. Il simbolo che abbiamo appena usato sta per $\sqrt{-1}$ e fu inventato da Eulero nel 1777, anche se apparve per la prima volta in un libro so-

lo nel 1794. Una teoria algebrica che si limiti alle soluzioni reali è costellata di pedanti eccezioni e distinguo, mentre la sua omologa nel campo complesso evita le difficoltà concentrandole in un unico, grande atto iniziale: l'accettazione di quegli strani numeri.

Piú o meno a metà del XVIII secolo, le ricerche iniziate dai matematici italiani del Rinascimento erano giunte a un punto morto. I loro metodi per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado erano visti come estensioni naturali di quelli quadratici, tecniche già note ai Babilonesi. Ora ci si concentrava sui numeri complessi e sulla loro connessione con i radicali; già si era scoperto che nel nuovo sistema un numero non aveva una radice cubica, ma tre, non una radice quarta ma quattro, e cosí via. La chiave per capire da dove saltassero fuori queste radici aggiuntive venne da un'interessante caratteristica della cosiddette «radici dell'unità», cioè dai valori complessi delle varie radici di 1, $\sqrt[n]{1}$. Per trovarle basta sapere che formano i vertici di un poligono regolare di n lati nel piano complesso, partendo dal punto reale 1 e procedendo in modo regolare lungo una circonferenza di raggio 1 centrata nello 0. La figura 5.1*a*, ad esempio, mostra la posizione delle radici quinte dell'unità, che si indicano con 1, q, q^2, q^3, q^4.

In generale, come mostra la figura 5.1*b*, dalla radice n di un nume-

Figura 5.1.
(*a*) Radici quinte dell'unità e (*b*) radici quinte di 2 nel piano complesso.



ro a piacere è possibile ottenerne altre $n-1$ moltiplicandole per le opportune potenze di q. Anche questi valori si posizionano ai vertici di un poligono regolare di n lati, lungo una circonferenza di raggio pari alla radice di partenza.

Tutto ciò non solo è molto carino, ma fa intuire l'esistenza di una struttura profonda. Le radici quinte di 2 si possono vedere come le soluzioni di $x^5 = 2$; abbiamo dunque un'equazione di quinto grado che ha cinque soluzioni nel campo complesso, una delle quali è reale. Similmente, $x^{17} = 2$ avrà 17 soluzioni in campo complesso, e cosí via per ogni valore. Non è necessario essere un genio per accorgersi dove stiamo andando a parare: il numero delle soluzioni è sempre pari al grado dell'equazione.

Lo stesso sembra valere per *tutte* le equazioni algebriche, di ogni tipo e grado, e i matematici dell'epoca si convinsero del fatto che la relazione tra numero di radici e grado fosse una caratteristica universale nel campo complesso (tecnicamente ciò è vero solo se si contano le cosiddette «molteplicità»; altrimenti dobbiamo dire che il numero di soluzioni è minore o uguale al grado). Eulero provò la validità di questa congettura per i gradi 2, 3 e 4 e sostenne che i suoi metodi di dimostrazione avrebbero funzionato anche nei casi successivi. Era un'idea plausibile, ma portare a termine il compito si rivelò allora impossibile; anche oggi si deve fare molta fatica per applicare sino in fondo le tecniche di Eulero. Comunque, da quel giorno i matematici dettero per scontato che risolvendo un'equazione di grado n avrebbero trovato precisamente n soluzioni.

Durante le sue ricerche in analisi e teoria dei numeri, Gauss mostrava una crescente insoddisfazione per il fatto che la congettura non fosse completamente dimostrata. E, come suo costume, si mise all'opera e ci riuscí lui stesso. Era un metodo complicato che prendeva le cose stranamente alla lontana. La sua giustezza era verificabile senza troppo sforzo da qualsiasi matematico esperto, ma nessuno riusciva a capire da dove mai gli fosse venuta l'idea. La volpe dei numeri agitava furiosamente la coda.

Il titolo in latino della sua tesi di dottorato si può tradurre con «Nuova dimostrazione che ogni funzione razionale intera in una variabile si può scomporre in fattori reali di primo e secondo grado». Tradotto dal gergo dell'epoca, ciò significa che ogni polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di altri polinomi di grado 1 o al massimo 2.

Gauss specificava che stava lavorando con numeri «reali», cioè con il sistema tradizionale in cui non è possibile estrarre la radice quadrata di un valore negativo. Oggi lo stesso teorema si enuncia in termini logicamente equivalenti ma piú semplici: ogni polinomio reale di grado n ha n radici reali o complesse. Tuttavia Gauss aveva scelto con attenzione le parole, in modo da evitare il nuovo campo numerico che ancora dava qualche grattacapo. Le radici complesse di un polinomio reale si possono sempre moltiplicare a coppie per formare un termine quadratico della scomposizione, mentre alle radici reali corrispondono i termini lineari. Annunciando fin dal titolo le sue intenzioni (cioè trattare di «fattori reali di primo e secondo grado»), Gauss riuscí a evitare l'ancora controverso uso dei numeri complessi.

Il «nuova» del titolo, invece, è del tutto ingiustificato, perché non ci sono «vecchie» dimostrazioni corrette di questo teorema algebrico: quella di Gauss è la prima davvero rigorosa. Ma per non offendere qualche illustre predecessore che aveva dichiarato (erroneamente) di aver provato la congettura, il giovane dottorando presentò la sua straordinaria novità come un semplice aggiornamento, che faceva uso di metodi nuovi (leggi: giusti).

Oggi questo risultato è detto «teorema fondamentale dell'algebra». Gauss lo riteneva cosí importante da darne quattro dimostrazioni diverse nel corso della carriera, l'ultima quando aveva già settant'anni. Per quanto lo riguardava, i numeri complessi non gli creavano alcun problema, anzi avevano un ruolo importante nei suoi metodi, e si era dato una spiegazione personale del loro significato. Però era un uomo che non amava le controversie. Nel corso degli anni avrebbe soffocato molte delle sue idee piú originali, tra cui le geometrie non euclidee e l'analisi complessa, perché non voleva provocare le «grida dei beoti».

Gauss non si limitò alla matematica pura. Nel 1801 il sacerdote e astronomo italiano Giuseppe Piazzi aveva scoperto con il suo telescopio quello che pensava fosse un nuovo pianeta: un debole punto luminoso che si spostava notte dopo notte rispetto alle stelle fisse, segno sicuro che si trattava di un corpo interno al sistema solare. Non era un pianeta ma un asteroide, il primo a essere scoperto, e fu battezzato Cerere. Ma dopo aver trovato un nuovo mondo, Piazzi lo perse ben presto nel chiarore del Sole. Le sue osservazioni erano talmente esigue che i colleghi non erano riusciti a calcolare l'orbita del nuovo oggetto celeste; tutti temevano che non l'avrebbero piú localizzato quando sarebbe riemerso dal disco solare.

Era un problema degno di Gauss, che infatti ci si mise d'impegno. Inventò metodi piú efficaci per il calcolo delle orbite, che potevano basarsi anche su un numero limitato di osservazioni, e riuscí a calcolare la posizione in cui Cerere sarebbe dovuto riemergere. Quando il pianetino si fece vedere proprio lí dove aveva previsto, la sua fama raggiunse i quattro angoli del mondo. Il celebre esploratore Alexander von Humboldt chiese al nume tutelare della meccanica celeste, Pierre-Simon de Laplace, chi fosse il miglior matematico di Germania. Laplace rispose che era Pfaff. Ma quando il perplesso von Humboldt obiettò «E Gauss?», l'altro disse: «Gauss è il piú grande al mondo».

Purtroppo la sua nuova fama lo fece deviare dal campo della matematica pura, e si ritrovò impegolato in lunghi calcoli di meccanica celeste, ambito in cui i suoi grandi talenti erano sprecati, a giudizio dei piú. Non che l'argomento non fosse importante, ma per raggiungere quei risultati sarebbero bastati studiosi di minor vaglia. D'altro canto, le sfere celesti gli fornirono l'opportunità di sistemarsi. Da tempo cercava di collocarsi in una posizione statale di prestigio, per sdebitarsi in qualche modo con il suo protettore, il duca. La sua impresa con l'asteroide lo catapultò in breve tempo sulla poltrona di direttore dell'osservatorio di Gottinga, incarico che conservò per il resto della sua vita attiva.

Nel 1805 sposò Johanna Ostoff, che in una lettera a Bolyai descriveva cosí: «Ha il bel volto di una Madonna, che riflette salute e pace interiore, occhi teneri e a loro modo attraenti, figura impeccabile: e ciò è bene. È di mente pronta e parla con proprietà: e anche ciò è bene. Ma la cosa migliore è il carattere quieto, sereno, modesto e casto: un angelo incapace di far del male a creatura alcuna». Johanna gli diede due figli, ma morí di parto nel 1809, lasciando il marito nella costernazione: «Ho chiuso i suoi occhi angelici, nei quali trovai il paradiso per cinque anni».

Divenne solitario e triste e non tornò mai piú alla vita di prima. Prese comunque un'altra moglie, Minna Waldeck, la migliore amica di Johanna, ma l'unione non fu delle piú felici, nonostante la nascita di altri tre bambini. Era un padre dominante, che si scontrava di continuo con i maschi e non lasciava nessuna libertà alle femmine. Alla fine i figli, stufi delle sue scenate, emigrarono in America e lí ebbero vita prospera.

Poco tempo dopo il suo insediamento a Gottinga, Gauss ritornò su una sua vecchia idea, cioè lo studio di un nuovo tipo di geometria che soddisfacesse i primi quattro assiomi euclidei ma non il quinto, quello delle parallele. Alla fine si convinse che era possibile stabilire vari tipi di geometrie non euclidee logicamente ben fondate, ma non pubblicò mai le sue ricerche al proposito, temendo che sarebbero state considerate troppo rivoluzionarie. Il figlio del suo vecchio amico Wolfgang Bolyai, János, giunse qualche anno piú tardi alle stesse conclusioni, ma Gauss non ne lodò gli sforzi, limitandosi a osservare che lui c'era arrivato prima. In seguito le geometrie non euclidee furono riscoperte in maniera indipendente dal matematico russo Nikolai Ivanovič Lobačevskij; Gauss lo aiutò a entrare nell'Accademia di Gottinga, ma si rifiutò di riconoscere pubblicamente i suoi risultati.

Piú tardi, grazie a ricerche piú approfondite, queste geometrie furono interpretate come diversi modi di definire le *geodetiche*, cioè gli itinerari di minore distanza tra due punti su una superficie curva. Se la superficie in questione ha curvatura positiva costante, come la sfera, la geometria che ne risulta si dice ellittica; se la curvatura è costante e negativa (tipo una sella), la geometria si dice iperbolica; con curvatura nulla, cioè in spazi «piatti», si ritrova il caso euclideo. Un modo di caratterizzare questi casi è dato dallo studio della loro *metrica*, cioè in pratica della formula che fornisce la distanza tra due punti.

Idee di questo tipo potrebbero aver guidato Gauss verso una teoria piú generale delle superfici curve. In questo campo pervenne a una formula molto elegante per la curvatura totale, dimostrando che forniva lo stesso risultato in tutti i sistemi di coordinate. Nella sua versione la curvatura non era necessariamente una quantità costante, ma poteva variare di punto in punto.

Seguendo una tendenza non inusuale tra i matematici, arrivato alla mezza età Gauss si rivolse a studi piú applicativi. Fece da supervisore in varie campagne di misurazione, la piú grande delle quali prevedeva la triangolazione dell'intera regione di Hannover, andando personalmente sul campo, per poi occuparsi dell'analisi dei dati. Per facilitare il lavoro, inventò l'eliotropo, un marchingegno che serviva a trasmettere segnali con l'aiuto della luce solare. Ma quando il cuore cominciò a dar segni di affaticamento, dovette smettere di andare in giro e decise di trascorrere gli ultimi anni a Gottinga.

In questo infelice periodo ricevette il manoscritto di un giovane norvegese di nome Abel, che riguardava l'impossibilità di risolvere le equazioni di quinto grado per radicali. Non gli rispose mai, probabilmente troppo depresso per leggere di matematica.

Attorno al 1833 si interessò di elettricità e magnetismo, collaborando con il fisico Wilhelm Weber a una teoria generale del magnetismo terrestre che fu pubblicata nel 1839. Insieme inventarono un telegrafo che collegava l'osservatorio di Gauss con il laboratorio di Weber, ma i fili continuavano a rompersi e nel frattempo altri avevano presentato modelli piú pratici. A un certo punto Weber fu licenziato dall'Università di Gottinga perché si era rifiutato di giurare fedeltà al nuovo re di Sassonia, Ernesto Augusto. Gauss ne fu assai rattristato, ma il suo conservatorismo e l'orrore che aveva per ogni polemica lo spinsero a non protestare pubblicamente. In forma privata, probabilmente, si mosse dietro le quinte per aiutare il collega.

Nel 1845 Gauss scrisse un rapporto sul fondo pensione per le vedove dei professori di Gottinga, esaminando l'effetto finanziario che avrebbe avuto un aumento dei membri del corpo accademico. Sempre in campo economico, investí in titoli di Stato e ferroviari e accumulò una piccola fortuna.

Dopo il 1850, afflitto da crescenti problemi cardiaci, rallentò notevolmente i ritmi di lavoro. L'evento piú importante di quel periodo, ai fini della nostra storia, fu la tesi di abilitazione (che nel sistema tedesco dava la possibilità di insegnare all'università) del suo studente Georg Bernhard Riemann, che generalizzava il lavoro di Gauss sulle superfici a spazi di dimensioni maggiori, introducendo il concetto di *varietà*. Riuscí in particolare a estendere la nozione di metrica e a trovare una formula per la curvatura delle varietà, dando inizio a tutti gli effetti a una teoria generale degli spazi curvi a piú dimensioni. Qualche anno piú tardi le sue idee si sarebbero rivelate fondamentali nella teoria gravitazionale di Einstein.

Gauss, che ormai era quasi sempre accompagnato da un medico, assistette personalmente alla discussione di Riemann e ne fu molto impressionato. La salute continuava a peggiorare, obbligandolo a letto, dove però continuava a leggere, scrivere lettere e curare i suoi investimenti. Nel 1855 morí serenamente nel sonno: si spegneva cosí la piú grande mente matematica che il mondo avesse visto.

Capitolo sesto

Il medico frustrato e il genio malaticcio

Il primo significativo passo avanti rispetto all'*Ars Magna* di Cardano fu compiuto attorno alla metà del Settecento. I matematici del Rinascimento erano in grado di risolvere le equazioni di terzo e quarto grado, ma i loro metodi erano solo una serie di trucchetti e manipolazioni algebriche, che sembravano funzionare piú che altro grazie a una serie di fortunate coincidenze. La ragione di fondo per cui tali soluzioni erano possibili fu scoperta solo attorno al 1770, a opera di due matematici: Joseph-Louis Lagrange, nato in Italia ma francese nell'animo, e Alexandre-Théophile Vandermonde, che francese lo era a tutti gli effetti.

Vandermonde era nato a Parigi nel 1735. Suo padre desiderava per lui una carriera da musicista, e Alexandre obbedí, diventando un bravo violinista. Ma nel 1770 i suoi interessi si rivolsero alla matematica. Il suo primo lavoro specialistico era dedicato alle funzioni simmetriche delle radici di un polinomio, cioè a quelle funzioni algebriche, come ad esempio la somma, il cui valore non muta se si cambia di posto alle radici. Il piú originale dei risultati da lui ottenuti fu la dimostrazione del fatto che l'equazione $x^n - 1 = 0$, associata all'n-agono regolare, è risolubile per radicali se n è minore o uguale a 10 (oggi sappiamo che è vero per ogni n). Il padre dell'analisi moderna, Augustin-Louis Cauchy, disse in seguito che Vandermonde era stato il primo a intuire che le funzioni simmetriche potevano essere utili nello studio della risoluzione per radicali.

Nelle mani di Lagrange, quest'idea sarebbe stata il punto di partenza per un attacco su piú fronti nel settore delle equazioni algebriche.

Lagrange era nato a Torino ed era stato battezzato con il nome di Giuseppe Lodovico Lagrangia. La sua famiglia aveva forti legami con la Francia: il bisnonno era stato capitano di cavalleria nell'esercito d'oltralpe, prima di trasferirsi alla corte dei Savoia. Giuseppe iniziò a firmarsi come «Lagrange» fin dall'adolescenza, pur conservando la dizione Lodovico o Luigi per il prenome. Suo padre era tesoriere all'ufficio dei Lavori pubblici e delle Fortificazioni della città; sua madre, Teresa Grosso, era figlia di un medico. In tutto la coppia ebbe undici figli, nove dei quali morirono in tenera età.

Nonostante la famiglia Lagrangia fosse di elevato ceto sociale per i canoni dell'epoca, era afflitta da problemi finanziari a causa di una serie di investimenti sbagliati. Il giovane Lodovico fu spinto a studiare giurisprudenza e si iscrisse all'ateneo torinese. Le materie giuridiche e le lingue classiche gli piacevano, mentre trovava noiose le lezioni di matematica, che erano in gran parte basate sulla geometria euclidea. Poi un giorno gli capitò tra le mani un trattato sui metodi algebrici in ottica, scritto dall'astronomo inglese Edmond Halley, e la sua opinione sulla materia cambiò drasticamente. Fu cosí che la sua carriera si instradò sui binari che l'avrebbero condotto alle prime scoperte significative: l'applicazione dei metodi matematici alla meccanica, soprattutto quella celeste.

Sposò una cugina, Vittoria Conti, che descrisse cosí in una lettera al collega e amico Jean le Rond d'Alembert: «Mia moglie, che è una mia cugina e ha vissuto a lungo con la mia famiglia, è un'ottima donna di casa, senza grilli per la testa». Non desiderava avere figli, disse, e cosí fu.

Lagrange avrebbe poi insegnato a Berlino, dato alle stampe numerosi lavori e vinto piú volte il premio annuale dell'Académie des Sciences (nel 1772 lo divise con Eulero, nel 1774 fu premiato per le sue ricerche sui moti della Luna e nel 1780 per un lavoro sull'influenza dei pianeti sulle orbite delle comete). Un'altra sua passione era la teoria dei numeri; nel 1770 dimostrò un classico del settore, il cosiddetto teorema dei quattro quadrati, secondo cui ogni intero positivo può essere scritto come somma di quattro quadrati perfetti: ad esempio, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $8 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$ e cosí via.

Divenne poi membro dell'Académie des Sciences e si trasferí a Parigi, dove rimase fino alla morte. Politicamente prudente, era convinto della necessità di rispettare le leggi anche nel caso in cui non le si approvasse, atteggiamento che con ogni probabilità gli evitò la brutta fine che toccò a molti intellettuali durante la Rivoluzione francese. Nel 1788 pubblicò il suo capolavoro, la *Meccanica analitica*, che rivoluzionò la meccanica trasformandola in una branca dell'analisi. Era orgoglioso del fatto che questo pesante volumone non contenesse neppure una figura, cosa che a suo modo di vedere ne rendeva la logica ancora piú stringente.

Rimasto vedovo, nel 1792 si risposò con la figlia di un astronomo, Renée-Françoise-Adélaide Le Monnier. L'anno seguente, durante il Terrore, l'Académie fu sciolta, a esclusione della Commissione per la riforma di pesi e misure. Molti eminenti scienziati furono allontanati, tra cui Lavoisier, Coulomb e Laplace. A Lagrange fu affidata la direzione della Commissione.

A quel punto, però, le sue origini italiane divennero un problema, perché il governo rivoluzionario approvò una legge che intimava l'arresto di tutti gli stranieri nati nelle nazioni nemiche della Francia. Lavoisier, che in quei mesi aveva ancora qualche aggancio, riuscí a far esonerare Lagrange dall'applicazione della legge. Poco tempo dopo, però, un tribunale rivoluzionario condannò a morte il grande chimico, che fu ghigliottinato nel volgere di ventiquattr'ore. Scrisse in seguito Lagrange: «Ci volle un attimo per spiccargli la testa, ci vorranno piú di cent'anni perché il mondo ne produca un'altra uguale».

Sotto il regno di Napoleone il matematico torinese fu coperto di gloria: nel 1808 fu nominato conte dell'Impero e gli fu conferita la Legion d'Onore; nel 1813 fu il turno dell'Ordine di Gran Croce. Morí appena una settimana dopo la cerimonia.

Nel 1770, lo stesso anno in cui dimostrò il teorema dei quattro quadrati, Lagrange si mise a scrivere un ponderoso trattato sulla teoria delle equazioni. Si proponeva in tal modo «di esaminare i vari metodi finora trovati nella risoluzione per via algebrica delle equazioni, ricondurli a principî generali e spiegare *a priori* perché tali metodi funzionano per il terzo e quarto grado e falliscono per i gradi superiori». Come dice Jean-Pierre Tignol[1], scopo dichiarato di Lagrange «è scoprire non solo il *come*, ma anche il *perché*».

Il grande matematico andò molto in profondità, raggiungendo una comprensione dei metodi rinascimentali assai piú accurata di quanto fosse possibile ai loro inventori. Trovò un meccanismo di fondo che li rendeva validi e dimostrò che non si poteva estendere al quinto grado e oltre. Però non riuscí a provare il passo successivo, cioè se in questo caso fosse comunque possibile una soluzione con altri metodi. Nelle sue parole, «[questi risultati] saranno utili a chi vorrà cimentarsi con i gradi superiori, perché forniscono vari spunti e soprattutto evitano un gran numero di tentativi infruttuosi e vani calcoli».

Lagrange si era accorto che tutti i trucchi da giocoliere matematico usati da Cardano, Tartaglia e compagnia si basavano sulla stessa tecnica. Al posto di affrontare direttamente l'equazione, la si trasformava in un'altra, detta «ausiliaria» o «risolvente», le cui radici erano legate da una relazione fissata a quelle del problema di partenza.

L'equazione ausiliaria di una cubica era di secondo grado, quindi risolubile semplicemente con i metodi babilonesi. La soluzione originaria si ritrova prendendo la radice cubica di un'espressione che contiene la soluzione ausiliaria. Se ricordate la formula di Cardano, ha esattamente questa struttura. Anche nel caso dell'equazione di quarto grado la risolvente è piú semplice, nello specifico una cubica, che può essere affrontata con il metodo di Cardano; la soluzione originaria, analogamente, si ritrova prendendo una certa radice quarta, e questa è proprio la struttura della formula di Ferrari.

Possiamo immaginare che Lagrange, esaltato da queste scoperte, si fosse immaginato che un'equazione di quinto grado potesse avere una risolvente di quarto, che bastasse affrontarla con il metodo di Ferrari e prenderne la radice quinta per ottenere una formula algebrica esplicita, consegnata ai posteri con il suo nome. Con lo stesso procedimento, avrebbe potuto trovare le risolutrici di *tutte* le equazioni di ogni grado.

Ma la cruda realtà lo riportò con i piedi per terra. Nell'equazione di quinto grado la risolvente non è piú semplice di quella di partenza, ma piú complicata: ha infatti grado sei. Il metodo che aveva funzionato cosí bene fino ad allora non portava da nessuna parte.

La matematica non progredisce rimpiazzando i suoi problemi piú difficili con altri ancora piú complessi: Lagrange aveva fallito. Eppure ciò non provava che l'equazione di quinto grado fosse irresolubile per radicali, perché non eliminava la possibilità di altri metodi.

Metodi che avrebbero funzionato, giusto?

Per Lagrange era una domanda retorica, ma uno dei suoi successori la prese sul serio e volle rispondere.

Si chiamava Paolo Ruffini, e in realtà diede una risposta che pensava fosse corretta. I contemporanei non trovarono nulla di sbagliato nella sua teoria, anche perché non lo presero quasi mai sul serio e non si misero a rifare i suoi calcoli. Ruffini passò la vita intera nella convinzione di aver dimostrato che l'equazione di quinto grado non è risolubile per radicali; solo dopo la sua morte ci si accorse che nella sua prova si celava un buco di proporzioni consistenti: un'assunzione da lui data per scontata che in realtà non lo era. Non si era nemmeno accorto di averla fatta, ma d'altronde era facile perdersi in quelle pagine e pagine di calcoli intricati.

Come ogni matematico di professione ben sa per amara esperienza diretta, è molto difficile accorgersi che si sta dando per scontato un fatto che invece va dimostrato, proprio perché in genere non lo si esplicita.

Ruffini nacque nel 1765; suo padre era un medico. Nel 1783 si iscrisse all'Università di Modena, dove seguí corsi di medicina, filosofia, lettere e matematica. Il suo professore di geometria era Luigi Fantini, quello di analisi Paolo Cassiani. Quando quest'ultimo divenne amministratore generale dei vasti possedimenti della famiglia d'Este, la cattedra vacante fu assegnata *pro tempore* proprio a Ruffini, che tecnicamente era ancora uno studente. Nel 1788 ottenne diplomi in filosofia, medicina e chirurgia, a cui l'anno seguente aggiunse quello in matematica. Subito dopo gli fu affidata la cattedra di Fantini, che andò in pensione per problemi di vista.

La storia entrò di prepotenza nelle sue ricerche. Nel 1796 Napoleone sconfisse gli eserciti dell'Impero d'Austria e del Regno di Sardegna, conquistò Milano e da lí occupò anche Modena. Ruffini fu costretto ad assumere incarichi politici. Nel 1798 manifestò l'intenzione di tornare alla carriera accademica, ma gli fu negato perché si era rifiutato, per motivi religiosi, di giurare fedeltà alla repubblica. Si trovò cosí disoccupato, con molto tempo libero da dedicare alle sue ricerche, soprattutto alla *vexata quaestio* delle equazioni di quinto grado.

Si convinse ben presto che nessuno aveva fino ad allora trovato una soluzione per l'ottimo motivo che tale soluzione non esisteva, o meglio, non ne esisteva una che utilizzasse nulla di piú complesso dei radicali. Nel 1799 pubblicò la sua *Teoria generale delle equazioni*, in due tomi, che inizia con queste parole risolute:

> La Soluzione algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al quarto è sempre impossibile. Ecco un Teorema troppo importante nelle Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter asserire, e di cui la dimostrazione quella si è, che principalmente mi ha spinto alla pubblicazione del presente Volume.
>
> L'immortale de la Grange con le sublimi sue Riflessioni intorno alle Equazioni inserite negli Atti dell'Accademia di Berlino ha somministrato il fondamento alla mia dimostrazione[2].

Il libro era lungo cinquecento pagine, zeppe di calcoli in gran parte astrusi. I colleghi ne furono intimiditi e scoraggiati. Anche al giorno d'oggi, ben pochi matematici di professione si addentrano con entusiasmo in dimostrazioni cosí lunghe e tecniche, a meno che non ci sia un'ottima ragione per farlo. Se Ruffini avesse annunciato di aver trovato una soluzione per la quintica, forse qualcuno si sarebbe sentito motivato, ma è comprensibile che tutti fossero riluttanti a dedicare giorni e giorni alla verifica di un teorema di inesistenza.

Soprattutto perché non era da escludere la possibilità che la dimostrazione fosse sbagliata in qualche punto, e non c'è nulla al mondo di piú irritante che scoprire un errore a pagina 499 di un testo che ne ha cinquecento, zeppe di calcoli.

Nel 1801 Ruffini spedí una copia del suo trattato a Lagrange; dopo qualche mese di silenzio, gliene mandò un'altra con un bigliettino in cui chiedeva all'illustre collega di fargli notare con sincerità eventuali errori, o di dirgli se per caso avesse dimostrato fatti già provati da qualcun altro, e quindi il suo libro fosse in definitiva inutile. Di nuovo nessuna risposta. Ci riprovò una terza volta nel 1802. Silenzio.

Passarono molti anni prima che al matematico italiano fosse riconosciuto l'onore che pensava di meritare, anni in cui circolarono tra gli specialisti voci incontrollate di errori nella dimostrazione. Ma poiché nessuno era in grado di indicare in modo esplicito i punti critici, a Ruffini non era data nemmeno la possibilità di difendere la sua tesi. Alla fine capí, giustamente, che il problema stava nella lunghezza eccessiva della prova e si mise a scriverne una versione piú concisa. La pubblicò nel 1803, con

una prefazione in cui si augurava di riuscire a provare il suo teorema con lo stesso rigore ma con una minore quantità di astruserie. Ma anche la nuova, piú concisa memoria non fu accolta con entusiasmo, cosí come le successive del 1808 e 1813: il mondo sembrava non essere pronto per le sue tesi. In tutti quegli anni Ruffini non smise mai di cercare il giusto riconoscimento per il suo lavoro. Jean Delambre, famoso per aver calcolato le posizioni del pianeta Urano, da poco scoperto, pubblicò un libro in cui trattava dei progressi in matematica a partire dal 1789, dove scrisse: «Ruffini sostiene di aver provato che l'equazione di quinto grado non è risolvibile per via algebrica». Al che il diretto interessato replicò per lettera: «Non solo lo sostengo, ma so di averlo dimostrato».

A onor del vero, qualche collega riconobbe il suo merito; il piú famoso di questi era Cauchy, che tra l'altro era noto per dare difficilmente credito di una scoperta ad altri che a se stesso. Nel 1821 scrisse a Ruffini: «Il vostro lavoro sulla risoluzione generale delle equazioni mi è sempre sembrato degno della massima attenzione; a mio giudizio, esso dimostra in modo completo l'impossibilità di soluzioni per via algebrica delle equazioni di grado superiore al quarto». Era un po' tardi per questo elogio, però.

Attorno al 1800 Ruffini iniziò a insegnare matematica applicata all'Accademia militare di Modena; nel frattempo continuò a esercitare come medico, visitando pazienti di ogni ceto sociale. Dopo la caduta di Napoleone, nel 1814 divenne rettore della locale università; i tempi erano incerti, e nonostante la sua abilità, la grande considerazione in cui era tenuto dai colleghi e la reputazione di probità, per lui il periodo del rettorato fu probabilmente molto difficile, anche perché arrivò a tenere allo stesso tempo le cattedre di matematica applicata, medicina pratica e clinica medica.

Nel 1817 scoppiò un'epidemia di tifo. Ruffini continuò indefesso a curare i suoi pazienti, finché non si ammalò a sua volta. Superò la malattia ma non riacquistò mai del tutto la salute; nel 1819 dovette abbandonare l'insegnamento di clinica medica. Ma la sua attività scientifica non conobbe soste: nel 1820 pubblicò una memoria sul tifo, in cui analizzava anche la sua esperienza di medico e paziente. Morí nel 1822, meno di un anno dopo aver ricevuto il tardivo riconoscimento di Cauchy per il suo lavoro sulle equazioni di quinto grado.

Uno dei motivi probabili per cui la teoria di Ruffini fu accolta con tanto scetticismo era il suo carattere di novità. Come già aveva fatto Lagrange, il suo punto di partenza era il concetto di *permutazione*. Una permutazione non è altro che un modo di disporre diversamente una lista ordinata: l'esempio piú ovvio è dato dal rimescolamento di un mazzo di carte, da cui si ottiene un ordine casuale, imprevedibile, proprio perché il numero di permutazioni possibili di 52 carte è enorme, e dunque la probabilità per un giocatore di indovinare quale sarà l'ordine finale del mazzo è a tutti gli effetti nulla.

Il collegamento tra equazioni e permutazioni è dato dall'insieme delle radici e dal fatto che certe caratteristiche elementari delle prime sono legate agli effetti delle seconde su quell'insieme. A livello intuitivo, ci aspettiamo di trovare che un'equazione «non sappia distinguere» l'ordine delle sue radici, e quindi che una permutazione non abbia effetti di peso. In particolare, i coefficienti dell'equazione si dovrebbero poter calcolare sulla base delle radici in modo simmetrico, cioè dovrebbero essere funzioni il cui risultato non cambia al permutare degli input (una somma, ad esempio).

Ma già Lagrange si era accorto che certe funzioni delle radici non sono sempre indifferenti alle permutazioni e che queste espressioni, che potremmo definire «parzialmente simmetriche», sono legate strettamente a un'eventuale formula generale di risoluzione. Fin qui, piú o meno tutti i matematici del tempo ci erano arrivati. Il passo successivo fu però piú difficile da digerire: facendo uso sistematico di un'altra idea di Lagrange, Ruffini si mise a «moltiplicare» le permutazioni tra loro, eseguendole in sequenza.

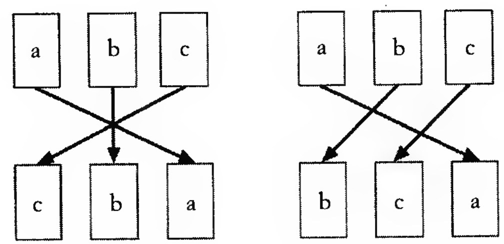
Vediamo un esempio con tre simboli *a*, *b* e *c*. Le possibili permutazioni sono sei: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* e *cba*. Prendiamone una a caso, diciamo *cba*. A prima vista, non è che una lista ordinata di tre lettere; ma possiamo anche pensarla come un'*azione* o una *regola* che ci dice come risistemare la lista di partenza *abc*: in questo caso, «rovescia l'ordine alfabetico». La stessa regola può essere applicata a qualunque altra lista: se ad esempio prendiamo *bca* e la rovesciamo otteniamo *acb*. È dunque sensato definire una «moltiplicazione» tra queste due permutazioni, il cui risultato è l'azione finale.

È un'idea chiave per la nostra storia, che forse si capisce meglio guardando qualche illustrazione. Nella figura 6.1 si vede a sinistra l'azione di *cba* e a destra quella di *bca*. Se vogliamo combinare le due permutazioni, ci accorgiamo subito che ci sono due modi per farlo, illustrati nella figura 6.2. A sinistra eseguiamo prima *bca* e poi *cba* (riconoscibile dalla disposizione delle frecce), ottenendo *acb*; se stabiliamo la convenzione di indicare le permutazioni in ordine inverso di esecuzione, possiamo allora scrivere $cba \times bca = acb$. L'ordine in questo caso è importante, perché se facciamo agire prima *cba* e poi *bca*, come a destra, otteniamo $bca \times cba = bac$.

La strategia di fondo nella dimostrazione di Ruffini era trovare alcune condizioni che le radici di una quintica risolubile per radicali dovevano necessariamente soddisfare. Se la generica equazione di quinto grado non rispetta tali requisiti, allora le sue radici non hanno la proprietà richiesta e quindi non sono ritrovabili tramite radicali, cioè con un metodo che sia la naturale estensione di quelli noti per i gradi inferiori.

Partendo da un'idea di Lagrange, Ruffini si concentrò sulle funzioni simmetriche delle radici. La quintica in generale ha cinque radici, e le permutazioni di cinque simboli sono 120. L'intuizione giusta fu questa: l'insieme delle permutazioni doveva in qualche modo riflettere certe caratteristiche strutturali della ipotetica formula risolutrice (come avveniva per la cubica e la quartica). Se fossero mancate quelle caratteristiche, si sarebbe potuto concludere che la formula di partenza

Figura 6.1.
Due permutazioni delle lettere *a*, *b*, *c*.

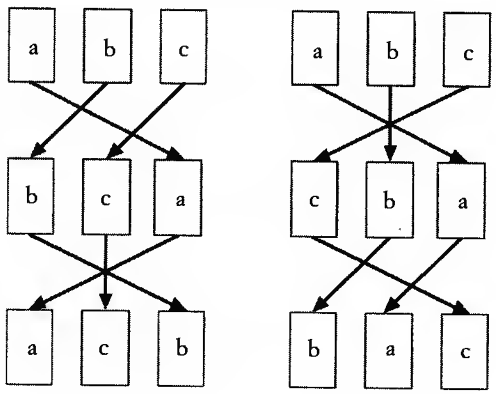


non esisteva. È un po' come andare a caccia in un terreno fangoso: se troviamo delle orme sappiamo che la preda è nei paraggi, se non vediamo nulla, invece, possiamo concludere che la preda non c'è.

Sfruttando le proprietà matematiche della nuova moltiplicazione sopra definita, Ruffini riuscí a dimostrare (almeno cosí pensava) che le 120 permutazioni hanno una struttura incompatibile con quella delle funzioni simmetriche che devono esistere nel caso l'equazione sia risolubile per radicali. Da questo punto di vista, ottenne un risultato davvero significativo. Prima del suo lavoro, praticamente tutti i matematici al mondo erano convinti del fatto che si potesse trovare la formula risolutrice, anche se non capivano come. L'unico a dubitarne era Gauss, che aveva buttato lí la sua opinione: la quintica per lui non era risolubile per radicali, ma la cosa non gli importava molto perché riteneva la questione poco interessante (uno dei pochi casi in cui il suo celebre intuito gli fece prendere una cantonata).

Dopo Ruffini sembrava diffondersi la sensazione generale che il problema fosse davvero impossibile da risolvere. Ben pochi ritenevano che il matematico italiano avesse realmente dimostrato con rigore la sua affermazione, ma molti concordavano sul fatto che perlomeno aveva messo il dito sulla piaga: forse i radicali avevano davvero qualcosa di ina-

Figura 6.2.
Come moltiplicare due permutazioni. Il risultato dipende da quale si esegue per prima.



deguato. Il cambio di atteggiamento ebbe anche l'infausto effetto collaterale di far scemare l'attenzione sul problema in generale.

Alla fine si scoprí che la dimostrazione di Ruffini conteneva una grossa falla, di cui nessuno dei suoi contemporanei si era accorto. Lo scetticismo dei colleghi, dunque, era giustificato. Ma il metodo era corretto, la strategia generale giusta; era solo sbagliata la tattica specifica. Per vincere ci sarebbe voluto un bravo stratega capace anche di prestare un'attenzione maniacale ai dettagli. In realtà era già nato allora: sto per presentarvelo.

Dopo aver portato la parola del Signore nelle zone piú povere e remote delle montagne norvegesi, per anni, senza un lamento, nel 1784 il pastore Hans Mathias Abel ricevette la giusta ricompensa alle sue fatiche: fu nominato parroco di Gjerstad, a sud, non lontano da Oslo. Non era una zona ricca nemmeno quella, ma a confronto del depresso Nord era un paradiso. La situazione economica della famiglia stava per migliorare nettamente.

I suoi doveri spirituali non sarebbero cambiati: guidare un gregge di anime e fare del suo meglio per mantenere tutti felici e lontani dal peccato. La sua famiglia era di origine benestante; il bisnonno danese gestiva una redditizia attività di forniture per l'esercito norvegese; il padre, anche lui commerciante, era stato consigliere comunale a Bergen. Hans era un uomo orgoglioso, schivo, non particolarmente brillante ma niente affatto stupido, e schietto fino all'esasperazione.

Per venire in aiuto ai poveri affamati della sua parrocchia, si era messo a coltivare lino, per produrre vestiti, e soprattutto uno strano e nuovo tubero, la patata. Nel tempo libero scriveva poesie, cercava di raccogliere informazioni per compilare una storia locale, e in generale viveva in armonia con la moglie Elisabeth. A casa sua, dove a detta di tutti si mangiava assai bene, l'alcol era bandito. L'alcolismo era allora un grave problema in Norvegia e un pastore doveva dare l'esempio al suo gregge; una volta sola si fece trovare ubriaco fradicio in chiesa, per mostrare ai parrocchiani l'effetto degradante del bere. Aveva una famiglia molto piccola, per la media dell'epoca, con soli due bambini: la figlia Margaretha e il figlio Søren.

La prima era priva di particolari qualità, non si sposò e passò quasi tutta la vita nella stessa casa dei genitori. Il secondo era fatto di tutt'altra pasta: scaltro, intelligente, creativo e amante del bel mondo. Non aveva ereditato dal padre la riservatezza e il senso del dovere, qualità che gli sarebbero state utili, ma ne seguí comunque le orme, diventando prima curato e poi pastore a Finnøy, sulla costa sudoccidentale. Nel frattempo aveva sposato Anne Marie Simonsen, figlia di amici di famiglia. Dei suoi parrocchiani scriveva: «La gente di qui è superstiziosa, ma conosce a memoria le Scritture, e sostiene le sue false opinioni appellandosi a una mal interpretata autorità divina». Nonostante tutto, pare che il lavoro non gli dispiacesse.

Nel 1801 scrisse a un amico: «La mia felicità domestica è da poco aumentata, perché nel terzo giorno dopo Natale mia moglie ha dato alla luce un bambino in perfetta salute». Fu battezzato Hans Mathias. Nell'estate dell'anno successivo ne arrivò un altro, Niels Henrik. Fin dal primo giorno, il secondogenito si rivelò un bimbo malaticcio, che la madre doveva accudire per gran parte del tempo.

Nel frattempo in Europa la situazione politica era tesa. L'unione dei regni di Norvegia e Danimarca si trovava stretta fra gli appetiti di due grandi potenze come l'Inghilterra e la Francia. Napoleone cercava di farsela alleata, mentre i britannici si accordavano con la Svezia. La tensione sfociò in guerra aperta, e gli inglesi invasero la Norvegia, che si arrese dopo soli tre giorni per salvare Copenaghen dalla distruzione. Qualche anno piú tardi, mentre la stella di Napoleone iniziava a tramontare, il suo generale Jean-Baptiste Bernadotte si installò sul trono di Svezia; Danimarca e Norvegia furono separate e quest'ultima fu annessa alla Svezia. Il parlamento norvegese, lo Storting, fu costretto a riconoscere l'autorità di Bernadotte.

Nel 1815 i fratelli Abel furono mandati a studiare alla scuola cattedrale di Cristiania, l'attuale Oslo. Il loro insegnante di matematica si chiamava Peter Bader ed era un tipo i cui princípî pedagogici prevedevano le punizioni corporali, anche violente. Hans e Niels, comunque, non davano problemi. Nel 1818 Bader picchiò selvaggiamente un allievo, figlio di un deputato dello Storting, tanto che il ragazzo ne morí. Incredibilmente non fu gettato in prigione, ma solo licenziato. Il nuovo insegnante era Bernt Holmboe, ex assistente del professore

di matematiche applicate Christoffer Hansteen. Questo evento segnò una svolta nella carriera di Abel, perché Holmboe era solito assegnare ai suoi allievi problemi interessanti che esulavano dal trito programma di studi. Il professore prestò a Niels molti testi classici, tra cui alcune opere di Eulero. «Da quel momento, – avrebbe poi ricordato Holmboe, – Abel si dedicò alla matematica con fervore inaudito e fece progressi con quella rapidità che contraddistingue i veri geni».

Poco prima di diplomarsi Niels si convinse di aver trovato la formula risolutrice delle equazioni di quinto grado. Sottopose una memoria a Hansteen e Holmboe, che non vi trovarono errori e la spedirono a Ferdinand Degen, un matematico danese molto influente che avrebbe potuto farla pubblicare negli Atti dell'Accademia delle Scienze danese. Nemmeno Degen trovò sbagli nel suo ragionamento, ma da vecchia volpe con molta esperienza chiese prima al ragazzo di mostrargli qualche applicazione a casi concreti. Niels si rese conto ben presto che qualcosa non andava; ne fu deluso, ma al tempo stesso pensò con sollievo che in quel modo gli era stata evitata una figura barbina su una pubblicazione prestigiosa.

L'ambizione di Søren, combinata con la sua mancanza di tatto, condusse a esiti disastrosi. Un giorno accusò pubblicamente due deputati dello Storting di aver fatto arrestare ingiustamente il direttore di una ferriera, tra l'altro di proprietà di uno dei due. Ne nacque un grande scandalo. Alla fine si appurò che l'uomo era del tutto inaffidabile, ma Søren si rifiutò di fare pubblica ammenda. Tagliato fuori dalla società, depresso e infelice, si mise a bere fino alla morte. Al suo funerale la vedova si presentò ubriaca fradicia e a un certo punto trascinò a letto con sé un servitore, suo favorito. Nella stessa situazione, a letto con l'amante, la mattina dopo ricevette i funzionari governativi venuti per le condoglianze. Una zia scrisse in una lettera: «Poveri figli, provo pena per loro».

Niels si diplomò nel 1821 e affrontò l'esame di ammissione all'Università di Cristiania. Ottenne il massimo dei voti in aritmetica e geometria, ottime valutazioni nelle materie scientifiche e risultati disastrosi in tutte le altre. Povero in canna dopo la morte del padre, fece richiesta per due borse di studio, una per l'alloggio e la dotazione di legna per il camino, l'altra per il vitto. Alcuni professori, accortisi del suo talento non comune, fecero una colletta e crearono un fondo per il suo mantenimento.

Scampato alla fame e al freddo, Niels potè dedicarsi anima e corpo alla matematica, in special modo alle equazioni di quinto grado, determinato a cancellare la macchia del suo precedente tentativo.

Nel 1823 Abel stava occupandosi degli integrali ellittici, settore dell'analisi in cui avrebbe lasciato la sua impronta perenne, con risultati ancora piú importanti di quelli ottenuti in algebra. Cercò anche di dimostrare o confutare l'ultimo teorema di Fermat, senza successo, ma riuscí comunque a provare che un eventuale controesempio avrebbe richiesto esponenti enormemente grandi.

Nell'estate di quello stesso anno incontrò una ragazza a una festa danzante e la invitò a ballare. Dopo qualche tentativo infruttuoso, entrambi scoppiarono a ridere e si confessarono a vicenda che non avevano la piú vaga idea dei passi da fare. Lei era Christine Kemp, da tutti chiamata Crelly, figlia di un ufficiale. Come Niels, non aveva molto denaro e si guadagnava da vivere dando lezioni private nelle piú disparate materie, dal cucito alle scienze. «Non è bella, ha i capelli rossi e le lentiggini, ma è una ragazza fantastica», scrisse Abel in una lettera. Fra i due sbocciò l'amore.

La produzione scientifica di Niels ne ricevette una forte spinta. Verso la fine del 1823 riuscí a provare che le equazioni di quinto grado non erano risolubili per radicali, e la sua dimostrazione, al contrario di quella di Ruffini, non aveva falle. La strategia era simile a quella dell'italiano, il cui lavoro era inizialmente ignoto ad Abel (in seguito doveva averne saputo qualcosa, perché nei suoi scritti accenna alle mancanze nella dimostrazione dell'altro), ma l'esecuzione tecnica molto migliore. È da notare che il suo metodo non partiva precisamente dall'errore di Ruffini per emendarlo, ma risultava alla fine essere proprio la cura giusta per rendere la prova completa.

Niels e Crelly si fidanzarono ufficialmente. Per sposarsi era necessario trovare un lavoro stabile, che lui avrebbe potuto ottenere se i piú grandi matematici d'Europa avessero riconosciuto il suo talento. Allo scopo, non bastava pubblicare i risultati su una rivista: doveva sfidare il leone nella tana e andare a proporre la sua teoria all'estero. Ci volevano altri soldi.

Con molta difficoltà, l'Università di Cristiania si persuase a concedergli una borsa da sfruttare per un viaggio di studio a Parigi, dove avrebbe incontrato alcuni tra gli scienziati piú famosi al mondo. Per prepararsi all'evento, decise di stampare a sue spese una traduzione in francese della sua dimostrazione, che purtroppo era stata pubblicata in norvegese su una oscura rivista locale. Il titolo della memoria, tradotto, suonava come «Saggio sulle equazioni algebriche, in cui si dimostra l'impossibilità di risolvere l'equazione generale di quinto grado».

Per contenere i costi, Niels condensò al massimo le sue idee, arrivando a stampare solo sei pagine. Erano sicuramente meno delle cinquecento di Ruffini, ma in matematica ci sono molte occasioni in cui la brevità non paga. Per arrivare a quella brutale sintesi fu costretto a tralasciare molti dettagli formali, alcuni di fondamentale importanza. Alla fine il saggio conteneva piú una traccia che la dimostrazione completa.

Si legge nella prefazione: «Molti matematici si sono concentrati sul problema di trovare un metodo generale per la soluzione delle equazioni algebriche, e altrettanti hanno tentato di provare che la cosa era impossibile. Oso sperare, dunque, che la comunità scientifica accoglierà con favore questo mio scritto, che ha lo scopo proprio di colmare questa lacuna nella teoria delle equazioni». Speranze vane. Anche se Abel fu ricevuto da qualche luminare parigino, e anche se riuscí a far leggere in giro il suo saggio, la dimostrazione era cosí densa di concetti che quasi tutti, con ogni probabilità, la trovarono incomprensibile. Gauss archiviò la sua copia e non la lesse mai: dopo la sua morte fu trovata ancora intonsa.

In seguito, resosi conto dell'errore, Niels scrisse due versioni piú lunghe e dettagliate della sua memoria. Aveva nel frattempo saputo del lavoro di Ruffini, come si deduce da questo brano: «Il primo a tentare una dimostrazione dell'impossibilità di soluzione generale per le equazioni algebriche fu il matematico Ruffini; ma il suo trattato è cosí complicato che è difficile giudicare se il ragionamento sia o meno corretto. A mio avviso, le deduzioni non sono sempre rigorose». Tuttavia, come i colleghi, non esplicitò la ragione del suo scetticismo.

Le dimostrazioni di Ruffini e Abel erano scritte nel linguaggio formale dell'epoca, che non era adatto al tipo di ragionamento richiesto. La matematica di allora si occupava soprattutto di casi concreti e idee specifiche, mentre in questo frangente era necessario pensare in termini molto generali, concentrarsi sulle strutture e sui processi sottostanti piuttosto che sui singoli oggetti. Le loro idee, quindi, risultavano difficili da digerire ai colleghi, per motivi che andavano ben oltre la complessità di esposizione. Qui non possiamo usare la loro terminologia originale, però, perché risulterebbe dura da comprendere anche per un professionista.

Per fortuna c'è un modo abbastanza facile per afferrare il nucleo centrale delle loro idee. Possiamo infatti pensare alla dimostrazione di Abel (e alla quasi-dimostrazione di Ruffini) come al progetto per costruire una torre.

La torre in questione ha una sola stanza per ogni piano e i vari piani sono collegati da una scala a pioli. In ogni stanza c'è un grande sacco, che contiene milioni di formule algebriche. Se ne esaminate una manciata, a prima vista vi possono sembrare prive di una struttura comune, come se fossero pezzi presi a caso da un libro di algebra. Ce ne sono di corte e di lunghe, di semplici e di complicatissime. A uno sguardo piú attento, però, si scoprono molte regolarità, che cambiano di piano in piano. Ad esempio, man mano che si sale le formule diventano piú complicate.

Nel sacco al pianterreno ci sono solo i coefficienti a, b, c ecc. e tutte le loro combinazioni algebriche, cioè quelle ottenute da somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione, ripetute a piacere. Nel mondo delle equazioni, questa cornucopia di coefficienti in combinazioni «innocue» viene data per scontata, come se fosse una dotazione gratuita.

Prima di salire la scala, pescate qualche formula dal sacco e trasformatela in un *radicale*, cioè prendetene una radice: quadrata, cubica, di quinto grado, quella che volete, basta che sotto il segno di radice ci sia qualcosa che avete estratto dal primo sacco. Per semplicità limitatevi alle radici p-esime con p numero primo, visto che tutte le altre si possono costruire a partire da queste (tale semplice osservazione si rivelerà molto utile).

Qualunque cosa abbiate scelto di portare con voi, salite la scala fino al primo piano e aprite il sacco che si trova lí. Noterete che il suo contenuto, all'inizio, è identico a quello del pianterreno. Ora gettatevi dentro il vostro radicale.

Quando l'arca di Noè si posò sul monte Ararat, il patriarca fece scendere le creature superstiti e le esortò ad andare e moltiplicarsi. Le formule fanno molto di piú: si moltiplicano, si dividono, si aggiungono e si sottraggono. Dopo pochi secondi di attività frenetica, il sacco del primo piano è zeppo di tutte le combinazioni «innocue» dei coefficienti con il radicale che avete introdotto. Paragonato a quello del pianterreno, è molto piú ricco; ma le sue nuove formule hanno qualcosa in comune, perché contengono tutte il radicale.

Prima di salire al secondo piano, ripetete quanto avete fatto di sotto: prendete una formula dal sacco (solo una) e formatene un nuovo radicale (primo). Portatelo con voi sulla scala, gettatelo nel sacco del piano di sopra e aspettate che le formule finiscano di accoppiarsi selvaggiamente.

E cosí via. A ogni piano si aggiunge un radicale e i sacchi si gonfiano. Le formule contenute sono formate dai coefficienti di partenza e da tutti i radicali che sono stati scelti fino a quel livello.

Alla fine arrivate in cima alla torre. Eseguite il solito rituale e verificate il contenuto del sacco: se trovate almeno una radice dell'equazione che state cercando di risolvere, la missione è compiuta e avete raggiunto la soluzione per radicali.

In questo gioco ci sono molte torri possibili, che dipendono dalle formule che estraete di volta in volta dai sacchi e dal radicale che scegliete. Quasi tutte non portano da nessuna parte, e la soluzione desiderata non appare neanche alla lontana. Ma se il compito non è impossibile in sé, se esiste una formula risolutrice, allora la torre corrispondente deve per forza avere una radice dentro il sacco all'ultimo piano: è la formula, infatti, che ci dice passo per passo come arrivare alla soluzione, tramite operazioni algebriche e radicali, cioè ci fornisce il progetto per costruire la torre.

Vediamo ora di reinterpretare le formule classiche per le equazioni di grado inferiore a cinque con il modello della torre. Le forme corrispondenti sono in figura 6.3.

Iniziamo con la cubica, caso abbastanza complicato ma non troppo, tipico ma non eccessivamente complesso. La torre di Cardano ha tre livelli.

Il sacco del pianterreno è standard, contiene i coefficienti e tutte le loro combinazioni. Per salire al primo piano dobbiamo prendere una radice quadrata molto specifica, che ha come argomento una particolare formula. Dunque il sacco del primo piano contiene tutte le combinazioni di questa radice con i coefficienti.

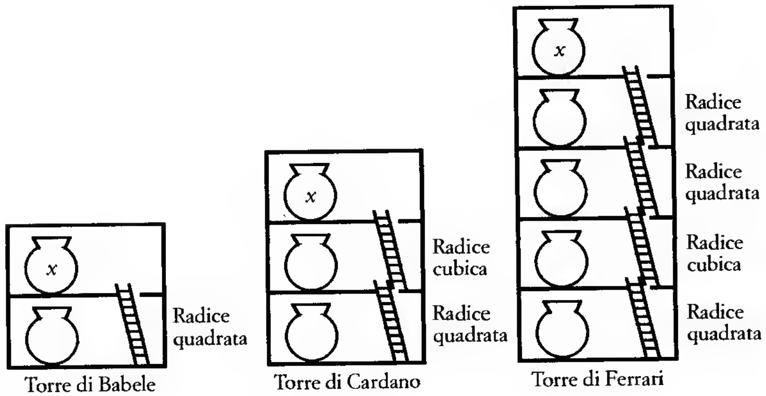
Per salire al secondo piano, l'attico, c'è bisogno di una radice cubica; di nuovo, la radice di una particolare formula, che coinvolge una combinazione di coefficienti e della radice quadrata del piano di sotto. Verifichiamo: il sacco di questo piano contiene una radice dell'equazione cubica di partenza? La risposta è sí, grazie alla formula di Cardano. Missione compiuta.

La torre di Ferrari è piú alta di due piani e ha dunque cinque livelli.

Anche qui si parte con il solito sacco dei coefficienti. Poi si sale, prendendo nell'ordine una radice quadrata, una cubica, una quadrata e ancora una quadrata. Arrivati all'attico, apriamo l'ultimo sacco e controlliamo se contiene una radice dell'equazione di quarto grado. Anche in questo caso la risposta è positiva: la formula di Ferrari ci fornisce le istruzioni precise per passare da un piano all'altro e costruire la torre.

La torre di Babele, dedicata alle equazioni di secondo grado, ha la

Figura 6.3.
La risoluzione per radicali delle equazioni di grado 2, 3 e 4.



stessa struttura delle altre, ma ha un aspetto piú tozzo: solo il pianterreno e il primo piano. Il sacco di partenza è il solito, poi si prende una radice quadrata scelta con cura, si sale di livello e i giochi sono già fatti: il secondo e ultimo sacco contiene una radice (anzi, entrambe le radici) dell'equazione di partenza. Ce lo garantisce la formula babilonese, quella che ci hanno insegnato alle scuole superiori.

E per il quinto grado?

Supponiamo che esista una formula risolutiva per radicali. Non sappiamo quale sia, ma ne possiamo comunque enunciare molte proprietà. Una di queste è che deve essere associata a una torre analoga a quelle viste prima. Chiamiamo questa ipotetica costruzione «torre di Abele».

La torre di Abele può essere alta centinaia di piani e le scale che portano da un livello all'altro possono comportare la scelta dei radicali piú disparati, radici 19-esime, 37-esime, chissà. Siamo sicuri solo di un fatto: il sacco al pianterreno contiene le solite combinazioni innocue dei coefficienti. E ci immaginiamo che lassú, nell'attico in mezzo alle nuvole, ci sia un sacco con una o piú radici della nostra equazione di quinto grado.

Entriamo nella torre e troviamo un matematico che ci guida e ci comunica che per salire al primo piano c'è un unico modo, e cioè prendere una particolare radice quadrata. Altrimenti non si passa.

A esser precisi non è proprio cosí. Potremmo scegliere altre radici e costruire altissime torri alternative: l'importante, dal punto di vista matematico, è che se vogliamo trovare una soluzione, a un certo punto, a qualche piano, dobbiamo per forza scegliere la particolare radice quadrata di cui sopra. Nessun altro stratagemma vi potrà aiutare: costruire nuovi piani nel tentativo di raggiungere l'attico non è che uno spreco di tempo e denaro. Quindi, da persone di buon senso, scegliamo subito la radice che ci indica la guida.

Ora siamo al primo piano. Di cosa abbiamo bisogno per salire al secondo?

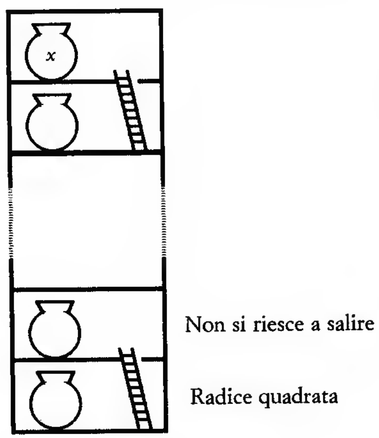
Piccolo problema: manca la scala. Siamo bloccati qui (figura 6.4). E se non c'è modo di raggiungere il secondo piano, di sicuro non arriveremo mai all'attico.

Per farla breve, la torre di Abele non esiste. Ne rimangono le fondamenta e un tentativo di costruzione abortito dopo il primo piano; o magari da qualche parte ci sono torri elaborate e molto alte, che però a un certo punto si interrompono pure loro, proprio per lo stesso motivo. Ruffini era quasi riuscito a dimostrare questo fatto, facendo però un errore tecnico.

Le dimostrazioni di Ruffini e Abel sono molto simili, ma con l'uso di queste metaforiche torri (tradotte naturalmente in linguaggio matematico) il giovane norvegese riuscí a riempire i buchi lasciati dal suo predecessore. Alla fine si dimostra senza dubbio che non esiste alcun modo di costruire una torre per l'equazione di quinto grado, che quindi non è risolubile per radicali. Provare a innalzare la torre di Abele è come cercare di arrivare alla Luna salendo ripetutamente sulle proprie spalle.

Per il Natale del 1828, Abel si era fatto invitare dagli amici Catharine e Niels Treschow a Froland, e non vedeva l'ora di incontrarsi con la sua Crelly, che viveva nei paraggi. Il medico non era molto favorevole a questo viaggio, perché la salute di Niels era davvero precaria. A

Figura 6.4.
Perché le equazioni di grado 5 non sono risolubili per radicali.



Torre di Abele

metà dicembre, comunque, il giovane matematico partí per Froland, cercando di proteggersi al meglio dai rigori dell'inverno norvegese. Il 19 giunse a destinazione; i suoi amici lo videro arrivare tutto infagottato, perché aveva indossato, uno strato sull'altro, tutti i vestiti che possedeva e aveva coperto le mani con calze di lana. Nonostante i continui attacchi di tosse e i brividi, si mise all'opera di buona lena, felice di lavorare nel salotto dei Treschow circondato dai loro bambini. La compagnia era un piacevole diversivo.

Abel era in cerca di un posto di lavoro sicuro, perché la sua borsa di ricerca a Cristiania sembrava precaria. Durante quelle vacanze si dedicò soprattutto al tentativo di assicurarsi una cattedra a Berlino, dove il suo amico e collega August Crelle stava lavorando per lui: aveva già persuaso il ministro dell'Istruzione a creare un istituto di ricerca matematica, dove Niels avrebbe potuto essere nominato professore. A tale scopo si era assicurato l'appoggio di Alexander von Humboldt, che all'epoca giganteggiava nel mondo della scienza, nonché due raccomandazioni da parte di Gauss e di Adrien-Marie Legendre, illustre accademico francese. Crelle disse al ministro che Abel era desideroso di trasferirsi a Berlino, ma che bisognava sbrigarsi a fargli un'offerta perché già lo avevano richiesto altrove, ad esempio a Copenaghen.

Il giovane avrebbe dovuto partire da Froland alla volta di Oslo il 9 gennaio, ma i brividi di febbre e gli attacchi di tosse erano peggiorati, tanto che non lasciava quasi mai la stanza da letto. I Kemp, futuri suoceri, erano molto preoccupati. Il giorno della sua partenza tossiva con tanta violenza da sputare sangue. Fu subito chiamato il medico di famiglia, che prescrisse riposo assoluto a letto e vari medicinali. Crelly gli fece da infermiera per qualche giorno e, grazie al suo affetto e alle cure, le condizioni di Niels migliorarono a vista d'occhio. Nel giro di poche settimane riuscí a uscire dal letto e a sedersi per brevi periodi. Gli si doveva impedire fisicamente di prendere in mano carta e penna per continuare le sue ricerche.

Arrivò una lettera di Legendre, che aveva molto ammirato il lavoro del giovane norvegese sulle funzioni ellittiche e che lo spingeva a pubblicare in via definitiva la sua soluzione del problema delle quintiche: «Vi esorto a far circolare a mezzo stampa questa nuova teoria il piú presto possibile. Vi porterà grandi onori e sarà universalmente riconosciuta come la piú grande scoperta tra le ultime della matematica». Evidentemente, mentre qualche collega cercava di ignorare il lavoro di Abel o di ritardarne la pubblicazione, in certi circoli ben informati la sua reputazione cresceva in fretta.

Verso la fine di febbraio del 1829 il medico capí che Abel non sarebbe mai guarito e che l'unica speranza era tenere a bada la malattia il piú a lungo possibile. Ecco cosa scrisse sul certificato medico che spedí a Bernt Holmboe, primo maestro del giovane:

> Subito dopo il suo arrivo a Froland fu colpito da un serio attacco di polmonite, con espettorazioni di notevoli quantità di sangue, che però cessarono dopo breve periodo. Ma la tosse cronica e la conseguente debolezza lo hanno costretto a letto, dove ancora deve giacere. Inoltre, non lo si deve esporre in alcun modo alla benché minima variazione di temperatura.
>
> Quel che è peggio, la tosse secca accompagnata da dolore acuto al petto rende probabile la diagnosi di tubercoli polmonari e bronchiali, che anche a causa della sua fragile costituzione possono facilmente portare alla tisi.
>
> In virtú del suo precario stato di salute [...] giudico del tutto improbabile che sarà in grado di far ritorno a Cristiania prima della primavera. Fino ad allora non potrà svolgere i suoi compiti, anche se la malattia dovesse avere il decorso piú favorevole.

Crelle, informato della situazione, raddoppiò gli sforzi per assicurare il posto di Berlino ad Abel, arrivando a dire al ministro che era necessario trasferire subito il giovane in una località dal clima piú mite. Finalmente, l'8 aprile scrisse al suo protetto la lettera con la notizia tanto attesa:

> Il ministero dell'Istruzione ha deciso di procedere con la nomina e chiamarvi a Berlino [...] Ancora non so dire quale sarà il vostro ruolo preciso e il vostro stipendio [...] Desideravo soltanto comunicarvi in fretta la grande notizia: siete in buone mani, statene certo. Non dovrete piú preoccuparvi per il futuro: ora che siete diventato un nostro collega starete al sicuro.

Ahimè, troppo tardi.

Abel era troppo debilitato per affrontare il viaggio. Fu costretto a rimanere a Froland dove, nonostante le cure di Crelly, diventava ogni giorno piú debole, e la tosse peggiorava. Non si alzava piú dal letto, tranne che per il cambio delle lenzuola. Provò a fare qualche calcolo, ma non riusciva neppure a tenere la penna in mano. Anche se in quei

frangenti dovette recriminare parecchio sulla povertà e sulle sfortune del passato, non lo diede a vedere e rimase gentile e di buon umore fino alla fine.

Per Crelly ovviamente era sempre piú difficile nascondere il proprio strazio al fidanzato, anche se trovava conforto nelle sue amiche Hanna e Marie. Niels non poteva essere lasciato solo di notte, perché la tosse minacciava di soffocarlo; fu allora assunta un'infermiera, per dare modo alla povera ragazza di riposarsi un po'.

La mattina del 6 aprile, dopo una notte di terribili sofferenze, Abel morí. Scrisse Hanna in una lettera: «La notte del 5 aprile dovette sopportare la piú straziante delle agonie. Verso mattina la tosse cessò; alle undici esalò l'ultimo respiro. Mia sorella e la sua fidanzata lo assistettero fino all'ultimo, accompagnandolo nel silenzioso passaggio tra le braccia della morte».

Cinque giorni piú tardi Crelly scrisse a Henriette Fridrichsen, pregandola di informare dell'accaduto la sorella Catharine Hansteen:

> Mia cara, solo il senso del dovere mi spinge a domandarti di fare questo, tanta è la riconoscenza che provo verso tua sorella, *Fru* Hansteen. La penna mi trema mentre scrivo queste parole: ti prego di informarla che ha perso un figlio caro e devoto, che l'amava enormemente.
>
> Il mio Abel è morto! [...] Ho perso tutto ciò che avevo su questa terra. Perdonami, me meschina, ma non riesco a scrivere altro. Chiedile di accettare la ciocca di capelli che accludo nella busta. Ti prego, prepara tua sorella alla notizia nel modo piú dolce possibile. La tua sfortunata C. Kemp.

[1] Tignol 1980.

[2] P. Ruffini, *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, nella Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna 1799, p. III [*N. d. T.*].

Capitolo settimo

Il rivoluzionario sfortunato

I matematici sono tipi incontentabili: ogni volta che risolvono un problema, subito se ne pongono degli altri.

La dimostrazione di Abel del fatto che le equazioni di quinto grado non sono risolubili per radicali fu accettata e iniziò a circolare subito dopo la sua morte. Ma piú che una fine, rappresentò un nuovo inizio. Anche se oramai era chiusa la questione generale, da tempo era noto, grazie agli sforzi di alcuni abili matematici, che esistevano quintiche particolari risolubili per radicali; non solo equazioni ovvie come $x^5 - 2 = 0$, che dà $x = \sqrt[5]{2}$, ma anche casi non intuitivi come $x^5 + 15x + 12 = 0$, la cui formula risolutiva è troppo complicata per essere scritta qui.

Era un bel mistero. Certe equazioni di quinto grado erano risolubili e altre no: quale caratteristica separava le due classi?

La risposta a questa domanda avrebbe cambiato il corso della matematica, e in seguito anche della fisica. La soluzione ha piú di 170 anni, eppure ancora oggi ne stiamo ricavando importanti conseguenze. Col senno di poi, è incredibile quanto vaste siano le implicazioni di un problema apparentemente innocuo. Risolvere un'equazione di quinto grado sembrava una questione di nessuna utilità pratica; allora come oggi, se in un problema fisico o ingegneristico si richiede la soluzione di una quintica, si applicano metodi numerici per ricavarne le radici con l'approssimazione desiderata, anche con molte cifre decimali. La risolubilità è dunque un classico esempio di matematica «pura», di un dibattito il cui risultato sembra interessare solo gli specialisti in materia.

Ebbene, niente affatto.

Abel aveva scoperto che nella risoluzione per radicali di certe quintiche ci si imbatteva in un ostacolo e aveva dimostrato che era davvero insormontabile. Il passo successivo, che è poi il punto centrale di tutta la nostra storia, fu compiuto da uno di quei tipi incontentabili che di fronte a un cosí bel regalo pongono la domanda a cui i matematici non sanno resistere, anche dopo la soluzione di un problema importante: «Bene, grazie. Ma *perché*? Com'è fatto in realtà quell'ostacolo?»

Questo può sembrare un atteggiamento negativo, ma piú volte nella storia si è rivelato di grande utilità. La filosofia di fondo si basa sul fatto che quasi tutti i problemi matematici sono troppo difficili per essere risolti da un uomo solo. Dunque, quando qualcuno annuncia di aver sciolto un enigma che aveva sconfitto i suoi predecessori, i colleghi non si accontentano di fare festa ma cercano di capire il perché: o il tizio ha avuto una botta di fortuna (cosa a cui in genere i matematici non credono) o ce l'ha fatta per qualche motivo particolare. E se si riesce a capire il meccanismo di fondo, il motivo per cui tutto funziona, si possono affrontare molti altri problemi con metodi simili.

Mentre Abel stava liquidando la domanda specifica: «È possibile risolvere per radicali tutte le equazioni di quinto grado?», ottenendo come risposta un no inappellabile, un pensatore ancora piú geniale stava lottando in un campo assai piú generale, chiedendosi quali tipi di equazioni potessero essere risolti per radicali e perché. A onor del vero, anche Abel aveva iniziato ad avventurarsi in questi territori e forse sarebbe giunto alla soluzione se la tubercolosi non l'avesse portato via in cosí giovane età.

L'uomo che stava per cambiare il corso della matematica e della scienza in genere si chiamava Évariste Galois. La sua vita è una delle piú teatrali e tragiche nella storia della disciplina. Le sue straordinarie scoperte rischiarono di andare perdute per sempre.

Se Galois non fosse mai esistito o se i suoi appunti si fossero davvero persi, non c'è dubbio che qualcun altro, prima o poi, sarebbe giunto agli stessi risultati. Molti suoi colleghi si erano imbarcati in un simile programma di ricerca, alcuni mancando il risultato per un pelo. Forse, in un universo parallelo, un altro matematico dotato dello stesso talento e intuizione (magari un Abel sopravvissuto per qualche anno in piú) ha svelato gli stessi misteri negli stessi anni. Ma nel nostro universo è stato tutto merito di Galois.

Nacque il 25 ottobre 1811 a Bourg-la-Reine, allora un paesino non

distante da Parigi, oggi un sobborgo situato nel dipartimento Haut-de-Seine, attraversato da due grandi strade di comunicazione, la N20 e la D60 (detta Avenue Galois nel suo tratto urbano). Nel 1792, in un'epoca in cui alle regine si tagliava la testa, il «Borgo della Regina» era stato ribattezzato Bourg-l'Égalité, «Borgo dell'Uguaglianza», per poi tornare al suo nome originario nel 1812. Ma i fermenti rivoluzionari della società francese non si erano certo placati.

Suo padre Nicolas-Gabriel era un repubblicano, principale esponente nel paese del Partito liberale (Liberté nel borgo di Égalité...), il cui programma prevedeva l'abolizione della monarchia. Nel 1814, anno in cui, dopo un fumoso compromesso, Luigi XVIII era salito al trono, Nicolas era diventato sindaco di Bourg-la-Reine, posizione che non doveva essere semplice per un uomo con le sue idee politiche.

Sua madre, Adelaide-Marie Démante, era figlia di un giureconsulto, la cui funzione all'epoca era quella di fornire a pagamento pareri legali su varie questioni. Ottima conoscitrice del latino, la donna trasmise al figlio la sua passione per i classici.

Nei primi dodici anni di vita Évariste rimase a casa, affidato alle cure intellettuali della madre. A dieci anni gli fu offerto un posto in un collegio a Reims, ma a quanto pare i genitori lo ritenevano troppo giovane per lasciare la famiglia. Nell'ottobre 1823 iniziò a frequentare un *collège*, il Louis-le-Grand, scuola prestigiosa che preparava alle migliori università. Subito dopo il suo arrivo, il giovane Galois vide in prima persona cosa poteva accadere a chi voleva fare la rivoluzione: un centinaio di allievi che si erano rifiutati di partecipare alla messa nella cappella della scuola furono espulsi in un batter d'occhio. Sfortunatamente per lui e per la matematica, la lezione non gli servì a niente.

Per i primi due anni vinse il primo premio in latino, ma poi cominciò ad annoiarsi. Fu costretto a ripetere le classi, punizione che aveva l'unico risultato di renderlo ancora piú insofferente e di peggiorare le cose. Ciò che lo salvò dalla perdizione fu la matematica, materia che gli sembrò abbastanza stimolante da meritare il suo interesse. E non a livello elementare: Galois affrontò di petto un classico come gli *Elementi di geometria* di Legendre. Per darvi un'idea della difficoltà, sarebbe come se un moderno studente liceale iniziasse a studiare fisica partendo dai lavori piú tecnici di Einstein. Ma in matematica esiste una specie di effetto soglia, una Cima Coppi intellettuale: se uno studente riesce a superare le prime salite, digerire le peculiarità linguistiche e notazionali della materia e rendersi conto che per andare avanti deve davvero *capire* i concetti, non impararli a memoria, da quel punto in poi la strada è tutta in discesa e può dirigersi verso idee piú astruse e complesse, mentre un suo compagno appena meno sveglio è ancora fermo ai triangoli isosceli.

È tutto da stabilire quanto sia stato facile per Galois capire l'opera capitale di Legendre, ma di sicuro l'impresa non frenò il suo entusiasmo. Poco dopo si mise a leggere gli articoli tecnici di Lagrange e Abel, e non fa meraviglia scoprire che la sua carriera si sarebbe concentrata sugli aspetti maggiormente trattati dai due grandi predecessori, in particolare la teoria delle equazioni algebriche. Questo argomento era forse l'unico in grado di catturare completamente l'attenzione del giovane Évariste, il cui profitto nelle altre materie scemava in proporzione alla mania con cui si dedicava ai grandi della matematica.

Era uno scolaro molto disordinato, difetto che l'avrebbe accompagnato tutta la vita. Gli piaceva disorientare gli insegnanti risolvendo i problemi a mente invece di «mostrare tutti i passaggi». Questa adorazione feticistica per le pagine piene di calcoli da parte dei professori affligge ancora oggi molti studenti di talento. Provate a immaginare l'allenatore di una squadra giovanile che dopo ogni gol chieda al suo miglior attaccante di descrivere l'esatta sequenza di movimenti che l'hanno portato a segnare, altrimenti non considera valida la rete. Ovvio che il povero ragazzo non è in grado di esplicitare ciò che il suo talento gli ha fatto compiere, cioè vedere un buco nella difesa e infilarcisi d'istinto, cosa ovvia a chiunque sappia qualcosa di calcio. Ecco, ai giovani portati per la matematica succede lo stesso.

L'ambizione di Galois lo portò a mirare in alto: decise infatti di continuare gli studi all'École Polytechnique, terreno di coltura della matematica francese. Ma non volle stare ad ascoltare i consigli dei suoi insegnanti, che lo esortavano a essere piú sistematico, a scrivere qualche parola in piú e soprattutto a dare qualche possibilità agli esaminatori di capire cosa stesse facendo. Terribilmente impreparato e troppo sicuro di sé, il giovane fu bocciato all'esame di ammissione.

Vent'anni piú tardi un autorevole matematico francese di nome Orly Terquem, direttore di una prestigiosa rivista, sintetizzò con due

parole l'accaduto: «Un candidato di intelligenza superiore non ha scampo se chi lo esamina non è al suo livello. Non mi capiscono, dice, dunque sono un barbaro». Oggi siamo piú consapevoli di quanto sia importante l'abilità di comunicare agli altri i propri pensieri e forse diremmo che un «candidato di intelligenza superiore» deve imparare a fare concessioni ai meno bravi. Galois, a ogni modo, non facilitava le cose con la sua intransigenza.

Rimase quindi un altro po' al Louis-le-Grand, e fu la sua fortuna. Un insegnante di nome Louis-Paul Richard capí le sue potenzialità (cosa rara) e lo iscrisse a un corso avanzato sotto la sua tutela. Addirittura si mise in testa che il ragazzo sarebbe dovuto entrare di diritto all'École Polytechnique, senza esame d'ammissione; forse aveva immaginato come sarebbero andate le cose tra Galois e la commissione. Non ci sono prove del fatto che Richard abbia presentato domanda in tal senso all'università, e se lo fece fu comunque respinta.

Prima del 1829 Galois aveva già pubblicato il suo primo articolo di ricerca, un lavoro avanzato ma pedestre sulle frazioni continue. Nel frattempo lavorava a un'opera piú ambiziosa, una sistemazione generale della teoria delle equazioni, in cui aveva fatto grandi progressi. Sottopose una sintesi dei suoi risultati all'Académie des Sciences chiedendo che fossero pubblicati negli Atti. Allora come oggi, ogni proposta veniva mandata a un *referee*, uno scienziato competente in materia che ne giudicasse il valore, la novità e l'interesse. In questo caso il compito fu affidato nientemeno che a Cauchy, il piú famoso matematico francese dell'epoca, che aveva già svolto ricerche in aree disciplinari molto vicine a quelle di Galois.

Purtroppo era tanto famoso quanto impegnato. Secondo la storia che si racconta in genere, il luminare perse il manoscritto; altri sostengono che iniziò a leggerlo e lo gettò via piccato. La verità è probabilmente piú banale. In una lettera all'Académie datata 18 gennaio 1830, Cauchy si scusa di non poter presentare un rapporto sul lavoro del «giovane Galoi [*sic*]» in quanto a casa indisposto, e impegnato in prima persona a scrivere una memoria sullo stesso argomento.

È una lettera rivelatrice, per due motivi. Tanto per cominciare, il famoso matematico non aveva buttato il manoscritto ma l'aveva ancora con sé sei mesi dopo la sua presentazione. E poi giudicava il lavoro del giovanissimo collega abbastanza importante da impegnare una parte del suo prezioso tempo a scrivere all'Académie per parlarne.

Ma durante la sessione successiva, Cauchy presentò solo la sua memoria. Che ne era stato di quella di Galois?

Lo storico francese René Taton sostiene che il primo fosse molto colpito dalle idee dell'altro, forse troppo. Quindi, invece di presentare il lavoro all'Académie, aveva esortato Galois a scriverne una versione estesa e molto rivista, per poter concorrere al prestigioso Grand Prix matematico. Non esistono documenti a sostegno di questa ipotesi, ma è vero che nel febbraio 1830 il giovane fece proprio cosí.

La memoria presentata è andata perduta, ma se ne riesce a ricostruire il contenuto generale dalle carte superstiti. È chiaro che il corso della nostra storia sarebbe stato molto diverso se quel lavoro fosse stato letto e lodato. Invece sparí letteralmente nel nulla.

Una possibile spiegazione del mistero si lesse nel 1831 sulle pagine de «Le Globe», giornale del movimento socialista dei sansimoniani, in cui si riferiva di un processo in cui Galois era accusato di aver minacciato in pubblico di uccidere il re. Scrive il cronista: «La sua memoria [...] era meritevole del Premio, perché risolveva i problemi che avevano sconfitto Lagrange. Cauchy aveva già tessuto le piú alte lodi del lavoro. E che succede? Il manoscritto viene perduto e il Grand Prix assegnato senza la partecipazione del giovane studioso».

Non è facile stabilire l'obiettività di questo articolo. Cauchy era fuggito dal Paese nel settembre 1830, spaventato dalla rivoluzione in atto e dalle sue tendenze anti-intellettuali, quindi nessuno aveva potuto intervistarlo. È probabile che la fonte fosse lo stesso Galois, vicino al sansimonismo grazie all'amico Auguste Chevalier, che l'aveva invitato a unirsi a una comune. Il giovane Évariste era allora impegnato in faccende ben piú gravi, cioè in un processo che avrebbe potuto costargli la vita, quindi l'autore dell'articolo doveva essere Chevalier, su imbeccata dell'amico. In conclusione, o si era inventato tutto, o Cauchy aveva davvero lodato il suo lavoro.

Ma ritorniamo al 1829. Sul fronte matematico, Galois si sentiva sempre piú frustrato da quella che percepiva come l'ostilità dei colleghi a riconoscere i suoi meriti, approvazione cui tanto anelava. Sul fronte personale, la sua vita iniziò a precipitare lungo una spirale distruttiva.

Tanto per iniziare, a Bourg-la-Reine l'atmosfera era tesa. Il padre di Évariste, sindaco del paese, era rimasto coinvolto in beghe politiche in cui si era inimicato il parroco che, dando prova di poca carità cristiana, fece circolare notizie false e tendenziose sulla famiglia Galois, arrivando a falsificare la firma del sindaco su certi documenti. Disperato per le conseguenze di quegli eventi, Galois senior si uccise.

La tragedia avvenne pochi giorni prima del secondo e ultimo tentativo di Évariste di farsi ammettere all'École Polytechnique. Non andò a buon fine. Secondo alcune testimonianze il giovane tirò il cancellino (pare fosse un pezzo di stoffa e non di legno, ma comunque...) addosso all'esaminatore, che di sicuro non ebbe una favorevole impressione del candidato. Nel 1899, grazie alle ricerche di Joseph Bertrand, si trovò un verbale da cui si poté evincere che gli fu fatta una domanda che non si aspettava, e la cosa lo mandò in bestia.

Quale che fosse il motivo, Galois si ritrovò bocciato e scornato. Sicuro di trionfare (doveva essere davvero un giovanotto arrogante), non si era curato di pensare all'unica alternativa possibile, cioè l'ammissione all'École Préparatoire, in seguito École Normale. Oggi questa istituzione è prestigiosa quanto l'École Polytechnique, se non di piú, ma allora rappresentava davvero una seconda scelta. Galois studiò qualcosa in fretta e furia, passò alla grande gli esami di matematica e fisica, fece un gran pasticcio in francese, ma fu comunque ammesso, alla fine del 1829, sia per la classe di scienze sia per quella di lettere.

Come abbiamo già visto, nel febbraio 1830 Galois sottopose la sua memoria all'Académie des Sciences per concorrere al Grand Prix. Il segretario dell'istituzione, Joseph Fourier, se la portò a casa per darle un'occhiata, ma la malasorte che avrebbe costantemente accompagnato la carriera del giovane Évariste si mise d'impegno: Fourier morí all'improvviso, e tra le sue carte postume non si trovò traccia del manoscritto in oggetto. Il comitato che assegnava il premio era comunque composto da tre persone, Legendre, Sylvestre-François Lacroix e Louis Poinsot, nessuno dei quali pareva avere con sé una copia della memoria. Forse fu uno di loro a perderla.

Galois era comprensibilmente furibondo e si convinse che il fatto non era avvenuto per caso, ma per la cospirazione di una congrega di mediocri intenta a soffocare il vero genio. Aveva bisogno di un capro espiatorio, e lo trovò nell'opprimente regime borbonico. Sentiva di doversi impegnare in prima persona per farlo cadere.

Sei anni prima, nel 1824, era salito al trono il successore di Luigi XVIII, Carlo X, che si rivelò un sovrano ben poco amato. Nelle elezioni del 1827 e soprattutto del 1830 l'opposizione liberale aveva avuto ottimi risultati, tanto da ottenere alla fine la maggioranza. Carlo, di fronte alla prospettiva di un'abdicazione forzata, tentò un colpo di mano e il 25 luglio 1830 proclamò la sospensione della libertà di stampa. Ma non aveva colto gli umori del popolo, che si ribellò e in soli tre giorni lo costrinse a cedere il posto a Luigi Filippo, duca di Orléans.

Gli studenti dell'École Polytechnique, l'università che Galois avrebbe voluto frequentare, furono tra i principali artefici della rivolta, con le loro dimostrazioni per le strade di Parigi. Il povero Évariste, antimonarchico fino al midollo, era stato invece segregato all'interno dell'École Normale, insieme con i compagni, su ordine del preside Guigniault.

Galois andò su tutte le furie: gli era stato negato un posto nella storia. Scrisse allora una lettera furibonda contro il preside alla «Gazette des Écoles»:

> La lettera del signor Guigniault pubblicata ieri nella sezione liceale, a seguito di un vostro articolo, mi sembra davvero inopportuna. Pensavo che avreste accolto con vivo interesse ogni modo per far capire ai lettori chi sia davvero questo individuo.
>
> Ecco come si sono svolti i fatti, come possono testimoniare quarantasei studenti.
>
> La mattina del 28 luglio molti studenti della Normale manifestarono il desiderio di unirsi alla lotta, ma il signor Guigniault disse loro per ben due volte che era in suo potere chiamare la polizia per riportare ordine nella scuola. La polizia, proprio quel giorno!
>
> Poi ci annunciò con il suo solito fare pedante: «Molti uomini coraggiosi stanno combattendo su entrambi i fronti. Se fossi un soldato non saprei da che parte stare. Cosa sacrificare, la libertà o il *legittimo governo*?»
>
> Ciò fu detto dall'uomo che il giorno dopo si mostrava con una grande coccarda tricolore sul cappello! Ecco in che mani sono le dottrine liberali!

L'editore pubblicò la missiva omettendo il nome del mittente. Il preside, saputo che si trattava di Galois, lo espulse dalla scuola per aver scritto una lettera anonima.

Il giovane reagí arruolandosi nell'artiglieria della Guardia Repubblicana, un'organizzazione paramilitare che era il nocciolo duro del movimento repubblicano. Il 21 dicembre 1830 il suo gruppo, molto probabilmente lui compreso, stazionava dalle parti del Louvre. Per quel giorno era attesa la sentenza nei confronti di quattro ex ministri: il popolo voleva una condanna a morte ed era pronto a ribellarsi se cosí non fosse stato. Ma poco prima dell'annuncio pubblico, la guarnigione della Guardia Repubblicana fu rimpiazzata da quella della Guardia Nazionale e da altri soldati fedeli al re. I quattro furono condannati al carcere, i temuti disordini non si verificarono e dieci giorni piú tardi Luigi Filippo sciolse i gruppi repubblicani perché minacciavano la sicurezza dello Stato. Nella sua carriera da rivoluzionario Galois non aveva piú fortuna che in quella da matematico.

La necessità di mantenersi era a quel punto piú pressante degli ideali politici. Si mise a dare lezioni private e sappiamo che ben quaranta studenti si iscrissero al suo corso avanzato di algebra. Évariste era confuso nello scrivere e ci sono buone ragioni per ritenere che lo fosse anche nelle lezioni. È probabile che condisse la matematica con commenti di natura politica; quasi sicuramente, pretendeva di affrontare argomenti troppo avanzati per i comuni mortali. In ogni caso, gli studenti presto non si fecero piú vedere.

Galois non aveva ancora rinunciato alle sue ambizioni scientifiche. La sua famosa memoria, intitolata *Sur les conditions de résolution des équations par radicaux*, fu presentata per la terza volta all'Académie. In assenza di Cauchy, ancora fuggiasco, la lettura fu affidata a Siméon Poisson e a Lacroix. Dopo due mesi di silenzio, Galois scrisse per avere notizie. Anche questa volta, nessuna risposta.

Nella primavera del 1831 il suo comportamento appariva sempre piú incoerente. In una lettera datata 18 aprile la matematica Sophie Germain, che era stata molto ammirata da Gauss per il suo primo lavoro del 1804, scrisse a Guillaume Libri: «Si dice che il giovane stia impazzendo del tutto, e temo che ciò sia vero». Dalla semplice instabilità di carattere stava passando alla paranoia conclamata.

In quello stesso mese diciannove ex membri dell'artiglieria della Guardia Repubblicana furono arrestati per gli eventi del Louvre con l'accusa di sedizione, ma una giuria li mandò assolti. Per celebrare l'evento, il 9 maggio si tenne una cena con duecento repubblicani al ristorante *Vendanges de Bourgogne*. Il sentimento prevalente era il desiderio di spazzar via Luigi Filippo. Alexandre Dumas, presente quella sera, scrisse: «Sarebbe difficile trovare in tutta Parigi uomini piú ostili al governo di quelli riuniti alle cinque di pomeriggio nella sala dei banchetti al pianterreno». Man mano che la sera avanzava il tumulto si fece inarrestabile. A un certo punto Galois fu visto brindare al re con un bicchiere in una mano e un pugnale nell'altra. Il gesto fu interpretato come una minaccia: i suoi compagni, che approvavano con tutto il cuore, uscirono in strada a festeggiare.

Il mattino del giorno dopo Galois fu arrestato a casa della madre (probabilmente alla cena era presente una spia della polizia) e accusato di attentato alla vita del re. Al processo si comportò con una briciola di buon senso in piú. Confessò che gli eventi erano andati esattamente come descritti, ma che nel suo brindisi al re aveva mostrato il coltello dicendo «se tradisce il popolo», sottintendendo che la minaccia era valida solo in quel caso, e che le sue parole erano state coperte dal rumore della folla.

D'altro canto, il giovane fece chiaramente sapere alla corte che non aveva dubbi: Luigi Filippo avrebbe presto tradito il popolo. Quando l'accusa gli chiese se credeva «che il re avrebbe mai abbandonato la strada della legge», egli rispose: «Tradirà presto, se non l'ha già fatto». Incalzato con altre domande, precisò: «L'andazzo del presente governo può far naturalmente supporre che Luigi Filippo presto tradirà il popolo, sempre che non l'abbia già fatto». Nonostante tutto, la giuria, forse composta da uomini che la pensavano come lui, lo assolse.

Il 15 giugno era libero. Tre settimane dopo, l'Académie finalmente discusse la sua memoria. Poisson non ci aveva capito nulla e lo scrisse nella sua relazione:

> Abbiamo fatto ogni sforzo per capire la dimostrazione di Galois. Il suo ragionamento non è abbastanza chiaro e compiutamente sviluppato per permetterci di giudicare se sia corretto, né possiamo decidere in merito. L'autore annuncia che la proposizione oggetto della presente memoria è parte di una teoria generale, suscettibile di molte applicazioni. Forse le varie branche di questa teoria saranno in grado di rendere il tutto piú chiaro, se considerate nell'insieme. Consigliamo quindi all'autore di pubblicare l'intera opera sua per permetterci di raggiungere un'opinione definitiva. Ma nello stato in cui si trova la parte che ha sottoposto all'Académie, non ne possiamo raccomandare l'approvazione.

L'aspetto piú sfortunato della vicenda è che le parole di Poisson, probabilmente, erano del tutto in buona fede. Si legge ancora nella relazione:

> La memoria non contiene, come promette il titolo, le condizioni di risolubilità per radicali delle equazioni; anzi, se tenessimo per vera la proposizione del signor Galois, non potremmo derivarne in modo lecito una maniera plausibile per decidere se un'equazione data di grado pari a un numero primo sia o meno risolubile per radicali, perché prima si dovrebbe comunque verificare se è irriducibile e se le sue radici si possono esprimere come frazione razionale di altre due.

L'ultima frase fa riferimento a un elegante criterio per determinare la risolubilità che era il vertice della memoria di Galois. In effetti non è chiaro come quel criterio si sarebbe potuto applicare a un'equazione specifica, perché bisogna prima conoscerne le radici. Ma senza una formula risolutiva, che senso ha tutto ciò? Scrive Tignol: «La teoria di Galois non manteneva ciò che sembrava promettere; era troppo innovativa per essere accettata». Gli accademici si aspettavano di vedere un criterio di risolubilità relativo ai *coefficienti* e il giovane ne aveva invece fornito uno sulle *radici*. Col senno di poi, erano aspettative irrealistiche: non è mai stato trovato, ed è estremamente improbabile che si trovi, un criterio elementare sui coefficienti. Ma il senno di poi non poté far nulla per il povero Évariste.

Il 14 luglio 1831, anniversario della presa della Bastiglia, Galois si trovava al fianco dell'amico Ernest Duchâtelet alla testa di un corteo repubblicano. Indossavano l'uniforme del disciolto corpo di artiglieria e avevano un coltello, varie pistole e un fucile carico. Portare quell'uniforme e circolare armati era un reato: i due furono arrestati all'altezza del Pont-Neuf e spediti al carcere di Sainte-Pélagie in attesa di giudizio. A Galois si contestò soltanto l'accusa meno grave, l'abuso di uniforme militare.

Duchâtelet dipinse sulla parete della cella la testa del re (e se ci fossero stati dubbi lo scrisse anche a mo' di didascalia) che rotolava sotto la ghigliottina. Questa mossa non deve aver aiutato la sua difesa.

Il primo a essere giudicato fu proprio l'amico; poi toccò a Galois. Il 23 ottobre fu condannato; presentò appello, che fu rigettato il 3 dicembre, quando già aveva trascorso oltre quattro mesi in galera. Gliene toccavano altri sei. Poco dopo, a causa di un'epidemia di colera, fu trasferito in ospedale e poi messo in libertà vigilata. Con la ritrovata libertà arrivò anche la prima e unica storia d'amore, con una donna che nei suoi scarabocchi è segnata come «Stéphanie D».

A questo punto i documenti si fanno scarsi e si deve lavorare molto per congetture. A lungo l'identità di questa Stéphanie è rimasta ignota, il che ha aggiunto un tocco di romantico mistero alla storia. Galois scrisse il suo nome per esteso su un foglio, ma poi lo cancellò furiosamente, rendendolo illeggibile. Un lavoro di ricostruzione da polizia scientifica, effettuato da Carlos Infantozzi, ci ha permesso di sapere che si trattava di Stéphanie-Felicie Poterin du Motel, figlia di Jean-Louis, medico interno della casa di cura Sieur Faultrier, dove Galois avrebbe trascorso gli ultimi mesi di vita.

Non sappiamo cosa pensasse il padre della ragazza di questa relazione, ma è probabile che un giovane disoccupato e senza un soldo, pericolosa testa calda con idee estremiste e la fedina penale macchiata, non fosse proprio il genero ideale.

Sappiamo qualcosa di piú (poco) dei sentimenti della ragazza, grazie a qualche scarabocchio trovato fra le carte di Galois e presumibilmente copiato dalle sue lettere. Molti misteri aleggiano su questa relazione, che avrà conseguenze fatali di lí a poco. Sembra che Galois fosse stato respinto e l'avesse presa molto male, ma non sappiamo in quali circostanze. Era forse un parto malato della sua mente, un'infatuazione mai corrisposta? Stéphanie sollecitò prima le sue avances per poi tirarsi indietro? Forse le caratteristiche di Évariste odiose al padre erano molto affascinanti per la figlia.

Dal punto di vista del nostro eroe, l'affare era serio. A maggio scrisse all'amico Chevalier: «Come posso consolarmi se in un solo mese si è inaridita la fonte della piú grande felicità concessa a un uomo?» Sul retro di alcuni fogli di ricerca si trovano estratti di due lettere di Stéphanie, una della quale comincia con «Vi prego, terminiamo questa relazione» – quindi forse c'era stato davvero qualcosa. Però continua cosí: «E non pensate a cose che non sono mai esistite e che non lo sarebbero mai» – il che darebbe l'impressione contraria. Nell'altra lettera si legge: «Ho seguito il vostro consiglio e ho pensato [...] a ciò che è accaduto. [...] A ogni modo, signore, siate certo che non avrebbe mai potuto esserci qualcosa di piú. Siete giunto a conclusioni errate e le vostre recriminazioni non hanno fondamento».

Sia che la storia fosse tutta nella sua testa, sia che la ragazza l'avesse inizialmente incoraggiato per poi tirarsi indietro, sembra proprio che Galois soffrisse terribilmente per quell'amore infelice. O magari l'affare era assai piú contorto? Subito dopo la rottura con Stéphanie (o meglio, quella che lui interpretò come una rottura), il giovane fu sfidato a duello da un uomo che, probabilmente, non ne approvava le avances. Anche in questo caso, però, il mistero è fitto e possiamo solo fare congetture.

Gli storici classici ci vedono dietro un intrigo politico. Autori come Eric Temple Bell e Louis Kollros parlano di un complotto da parte dei suoi avversari, che presero come pretesto la relazione con la signorina du Motel per regolare i conti, sotto le mentite spoglie della «questione d'onore». Secondo un'ipotesi abbastanza azzardata, Galois era stato tradito dalla soffiata di un informatore di polizia.

Oggi queste tesi sembrano improbabili. Dumas scrive nella sua autobiografia che Galois fu ucciso da Pescheux d'Herbinville, anch'egli repubblicano, descritto come «giovanotto affabile, che era uso fabbricare mortaretti avvolti in carta crespa e chiusi con nastri di seta». D'Herbinville era una sorta di eroe, uno dei diciannove ex componenti della Guardia Repubblicana processati e assolti il 14 luglio. Di sicuro non era un informatore della polizia, i cui elenchi furono resi pubblici nel 1848 da Marc Caussidière quando diventò capo delle forze dell'ordine.

Il verbale di polizia relativo al duello lascia intendere che il rivale di Galois era un suo compagno sovversivo, e che dunque il motivo della disputa doveva essere quello piú evidente. Anche le parole dello stesso Évariste sembrano confermarlo: «Chiedo ai patrioti e ai miei amici di non biasimarmi perché muoio per una causa diversa dal bene del mio Paese. Ahimè, cado vittima di una infame civetta. La mia vita finisce in una lite da osteria. Ah, morire per una ragione cosí banale, cosí disprezzabile! [...] Perdonate chi mi ha ucciso, sono in buona fede». O non sapeva di essere al centro di un intrigo politico, o l'intrigo in questione non è mai esistito.

La causa prossima del duello, dunque, sarebbe da imputare almeno in parte a Stéphanie. Prima di recarsi al luogo fatale, Galois aveva scribacchiato cose senza senso sul tavolo, tra cui le parole «Une femme» (poi aveva cancellato «femme»). La causa remota della sua fine prematura è oscura, come molti aspetti della sua vita.

Dal punto di vista scientifico, i fatti sono molto piú chiari. Il 29 maggio, vigilia del duello, Galois scrisse ad Auguste Chevalier una lettera in cui riassumeva le sue scoperte, che l'amico avrebbe poi fatto pubblicare sulla «Revue Encyclopédique». Vi è contenuto il nocciolo della teoria, con i rapporti tra gruppi ed equazioni polinomiali (vedremo tra poco di cosa si tratta) e una condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione generica sia risolubile per radicali.

Nella lettera ci sono anche idee sparse sulle funzioni ellittiche e sull'integrazione delle funzioni algebriche, oltre ad affermazioni troppo criptiche per essere decifrate. Su un margine sono scarabocchiate le parole «non c'è piú tempo», che hanno fatto nascere la leggenda secondo la quale Galois passò la notte prima del duello a condensare freneticamente nella lettera tutte le sue scoperte. In realtà si trovano anche affermazioni come «Nota dell'Autore», ed è chiaro che si tratta di un commento alla terza memoria rifiutata dall'Académie, completa di osservazioni al margine fatte da Poisson.

I duellanti si sfidarono pistole alla mano. L'autopsia parla di colpi sparati da una distanza di venticinque passi, ma la verità forse è ancora piú straziante. Il 4 giugno 1832 «Le Precursor» scriveva:

> *Parigi, 1° giugno.* Nella giornata di ieri, un deplorevole duello ha privato le scienze esatte di un giovane in cui si riponevano le piú alte speranze, la cui precocità fu negli ultimi tempi adombrata dalla politica. Évariste Galois [...] si batté con uno dei suoi vecchi amici, giovane quanto lui, come lui membro della Società degli Amici del popolo, come lui assolto in un processo politico. Si dice che la causa del combattimento fosse di natura amorosa. Scelsero di sfidarsi alla pistola, ma per via dell'antica amicizia non ebbero cuore di guardarsi e mirare, dunque si affidarono al cieco fato. A distanza ravvicinata, scelsero una pistola e fecero fuoco. Si scoprí che solo una delle armi era carica. Galois fu trapassato da parte a parte da una pallottola del suo rivale. Portato all'Hôpital Cochin, morí due ore dopo. Aveva 22 anni; il suo avversario, L. D., è di poco piú giovane.

La sigla L. D. sembra non avere a che fare con Pescheux d'Herbinville, ma in realtà la «D» può riferirsi a una variante ortografica del cognome, scritto tutto attaccato, e la «L» è forse un semplice errore di stampa. L'articolo, tra l'altro, è pieno di particolari imprecisi, tra cui la data del duello e l'età di Galois.

Tony Rothman[1] ha proposto una teoria forse migliore: la persona che corrisponde meglio alle descrizioni non è d'Herbinville, ma Duchâtelet, l'amico arrestato con lui al Pont-Neuf. I biografi di Galois Robert Bourgne e Jean-Pierre Azra sostengono che si chiamasse Ernest, ma non è sicuro (oppure anche in questo caso la «L» è un refuso). Per citare Rothman: «Alla fine arriviamo a una storia coerente e credibile di due vecchi amici che si innamorano della stessa fanciulla e decidono di risolvere la questione con una versione ancor piú truculenta della roulette russa».

Questa ipotesi è anche compatibile con un altro particolare raccapricciante. Galois fu colpito allo stomaco, in un punto che risultava quasi sempre fatale. Centro plausibile, se il duello si fosse svolto a distanza ravvicinata; ma se davvero i due fossero stati a venticinque passi, si sarebbe trattato dell'ultimo colpo di sfortuna di una vita segnata.

Évariste non morí in due ore, ma il giorno dopo, 31 maggio 1832, a causa della peritonite. Rifiutò l'estrema unzione e fu sepolto il 2 giugno nella fossa comune del cimitero di Montparnasse.

La lettera a Chevalier si chiude con queste parole: «Chiedi a Jacobi o a Gauss di dare pubblicamente la loro opinione, non solo sulla verità di questi teoremi, ma sulla loro importanza. Spero che tra qualche anno ci sarà qualcuno in grado di decifrare a suo vantaggio tutto questo caos».

Ma quale fu il grande traguardo raggiunto da Galois? Cosa era nascosto in quel caos?

La risposta è un punto fondamentale della nostra storia, e non è semplice spiegarla in poche parole. Il giovane francese vide per primo le cose da un nuovo punto di vista, che cambiò i contenuti della matematica, facendole compiere un passo audace ma necessario verso l'astrazione. Nelle sue mani, la disciplina cessò di essere ristretta allo studio delle forme e dei numeri, cioè all'aritmetica, alla geometria e alle loro conseguenze, come l'algebra e la trigonometria, per allargarsi all'esame delle *strutture*. Da scienza degli *oggetti* divenne scienza delle *trasformazioni*.

Non fu merito esclusivo di Galois, ovviamente, che cavalcava su un'onda creata ad arte da Lagrange, Cauchy, Ruffini e Abel. Ma la sua abilità di navigatore fu tale da reclamare per sé l'intera disciplina. Fu il primo a capire davvero che i problemi matematici a volte si potevano affrontare meglio trasportandoli su piani di ragionamento piú astratti.

Ci volle un po' perché la bellezza e l'importanza dei suoi risultati arrivassero a diffondersi nella coscienza collettiva della matematica. Anzi, mancò poco che andassero perduti. Il salvataggio fu operato da Joseph-Louis Liouville, il figlio di un capitano dell'esercito napoleonico che divenne professore al Collège de France. Nell'estate del 1843 si rivolse con queste parole all'Académie des Sciences, la stessa istituzione che aveva perso o rifiutato per tre volte lo scritto di Galois: «Spero di suscitare l'interesse dell'Accademia annunciando che ho trovato fra le carte di Évariste Galois una soluzione, esatta quanto illuminante, di questo elegante problema: se esista una soluzione per radicali...»

Se il professore non si fosse peritato di scartabellare tra gli appunti dello sfortunato rivoluzionario, di decifrare i calcoli confusi e disordinati, dedicando molto tempo a cercare di capire quali fossero le intenzioni dell'autore, tutto sarebbe stato con ogni probabilità gettato via, e la teoria dei gruppi avrebbe dovuto aspettare di essere riscoperta piú avanti. La matematica deve davvero molto a Liouville.

Man mano che i metodi di Galois venivano divulgati e compresi dai colleghi, prese forma un inedito e importante concetto matematico: quello di gruppo. Era nata una nuova vasta branca della disciplina, una sorta di «analisi della simmetria», che da quel momento avrebbe colonizzato ogni ambiente.

Galois affrontò il problema per mezzo delle permutazioni, che abbiamo visto nel capitolo precedente, applicate alle radici delle equazioni algebriche. L'esempio piú semplice, tra quelli non banali, è dato dalla cubica e dalle sue tre radici *a*, *b* e *c*. Come ricorderete le loro permutazioni sono sei, e alla maniera di Lagrange e Ruffini le possiamo moltiplicare, eseguendole in successione: abbiamo visto ad esempio che $cba \times bca = acb$. Con lo stesso procedimento, possiamo costruire una «tavola di moltiplicazione» completa, analoga alla tavola pitagorica imparata a scuola. È piú semplice esaminarne la struttura se assegniamo nuovi nomi alle permutazioni, come ad esempio $I = abc$, $R = acb$,

$Q = bac$, $V = bca$, $U = cab$ e $P = cba$. Con questa notazione, la tavola è mostrata in figura 7.1. Ricordiamo che il valore in corrispondenza di due termini generici X e Y è il loro prodotto $X \times Y$, che significa «esegui Y, poi X».

Galois si accorse che una caratteristica apparentemente banale di questa tabella ha in realtà un profondo significato. Il prodotto di due permutazioni qualsiasi, come si vede, è ancora una permutazione: gli unici simboli che compaiono sono i sei che abbiamo definito sopra. Una struttura dotata di questa proprietà (il prodotto di ogni membro è sempre, a sua volta, un membro dell'insieme) si definisce *gruppo*. La cosa interessante è che all'interno della tabella si può individuare una collezione piú piccola di permutazioni che ha la stessa proprietà: segnatamente quella data da $[I, U, V]$ mostrata in figura 7.2. Quando come in questo caso un gruppo è parte di un altro piú grande, lo chiamiamo *sottogruppo*.

Il nostro gruppo ha altri sottogruppi. Tre contengono due permutazioni ciascuno, $[I, P]$, $[I, Q]$ e $[I, R]$, mentre uno è formato da un solo elemento, $[I]$. Si può dimostrare che i sei sottogruppi appena elen-

Figura 7.1.
Tavola di moltiplicazione per le sei permutazioni delle radici di un'equazione cubica.

	I	**U**	**V**	**P**	**Q**	**R**
I	I	U	V	P	Q	R
U	U	V	I	R	P	Q
V	V	I	U	Q	R	P
P	P	Q	R	I	U	V
Q	Q	R	P	V	I	U
R	R	P	Q	U	V	I

cati sono gli *unici* possibili all'interno del gruppo delle permutazioni di tre elementi.

A questo punto Galois (anche se usando il linguaggio dell'epoca e non in questi termini) rivolse la sua attenzione alle simmetrie delle equazioni, cioè a quelle permutazioni che conservano tutte le relazioni algebriche tra le radici. Continuiamo con l'esempio della cubica e supponiamo che le radici a e b siano legate dalla relazione $a + b^2 = 5$. R è una sua simmetria? Andiamo a vedere la definizione: R lascia fissa a e scambia di posto b e c. Allora perché R sia una simmetria deve valere anche $a + c^2 = 5$. Se ciò è falso, potete scartare questa permutazione. Se è vero, dovete andare avanti e controllare *tutte* le relazioni algebriche tra le radici prima di concludere che R è una simmetria.

Data un'equazione, trovare in modo esplicito tutte le sue simmetrie è un compito tecnicamente complesso. Ma anche senza fare nemmeno un calcolo, possiamo stare sicuri di una cosa: le sue simmetrie devono essere un sottogruppo del gruppo di tutte le permutazioni delle radici.

Perché? Supponiamo ad esempio che P e R conservino tutte le relazioni algebriche tra le radici di una data equazione. Allora se applichiamo R a una qualsiasi di queste relazioni ne otteniamo un'altra valida; e se a questa applichiamo P, continuiamo a ottenere una relazione vera. In altre parole, facendo agire prima R e poi P, cioè PR, rimaniamo nell'ambito delle relazioni valide. Dunque PR è una simmetria, e quindi l'insieme ha la proprietà di gruppo.

Figura 7.2.
Tavola di moltiplicazione per un sottogruppo di tre permutazioni.

	I	U	V
I	I	U	V
U	U	V	I
V	V	I	U

Questo fatto elementare sta alla base della teoria di Galois. A ogni equazione algebrica si può associare un gruppo delle sue simmetrie, oggi detto giustamente *gruppo di Galois*, che è un sottogruppo del piú generale gruppo di tutte le permutazioni delle radici.

Da questa cruciale intuizione nasce una possibile strategia d'attacco: capire che tipo di sottogruppi si presenta nelle varie circostanze. In particolare, se un'equazione si può risolvere per radicali, allora il suo gruppo di Galois deve in qualche modo riflettere questo fatto nella sua struttura interna. Se cosí fosse, data un'equazione qualunque basta calcolarne il gruppo di Galois e controllare se ha le proprietà richieste, per capire senza dubbio se è o non è risolubile per radicali.

Da qui in poi Galois affrontò il problema sotto un'ottica diversa. Per capire di cosa si tratti, dobbiamo abbandonare le torri, i sacchi e le scale del capitolo precedente e passare agli alberi.

Non fraintendetemi, lui certo non ragionava in questi termini, né Abel parlò mai di una torre di Cardano, ma il suo metodo è simile a un processo in cui vari rami si dipartono di volta in volta da un tronco centrale: il tronco è il gruppo di Galois, i rami, i ramoscelli e le foglie sono i suoi sottogruppi.

I sottogruppi si manifestano naturalmente quando pensiamo all'azione dei radicali sulle simmetrie di un'equazione. Come cambiano le cose sotto la radice p-esima delle relazioni algebriche? Galois dimostrò che in questo caso il gruppo di partenza si deve spezzare in p blocchi, tutti della stessa dimensione (ricordiamo, come aveva già detto Abel, che possiamo sempre prendere p numero primo). Quindi, ad esempio, un gruppo di 15 permutazioni si può dividere in cinque gruppi di 3 elementi ciascuno o tre di 5 elementi ciascuno. Però c'è una condizione fondamentale da soddisfare: uno di loro deve avere particolari proprietà (che qui non scriverò) tali da renderlo un *sottogruppo normale di indice p*. Pensiamo all'albero che si biforca in p rami: ebbene, uno di quei rami deve essere il sottogruppo normale.

Nel nostro esempio delle sei permutazioni, i sottogruppi normali sono tre: il gruppo intero $[I, U, V, P, Q, R]$, il sottogruppo $[I, U, V]$ e quello formato da un solo elemento $[I]$. Gli altri tre visti sopra, che contengono due permutazioni ciascuno, non sono normali.

Ora veniamo all'equazione di quinto grado. Ha cinque radici, e le permutazioni di cinque simboli sono 120. Il tronco dell'albero ha il massimo di simmetria, cioè è formato da tutte le 120 permutazioni delle radici. La singola radice ha il minimo di simmetria, e dunque il suo gruppo contiene solo la permutazione banale, quella che non cambia nulla; dunque l'albero ha 120 foglie (in altre parole, ai due estremi dobbiamo mettere i due sottogruppi ovvi: il gruppo intero e quello formato solo dall'identità, che lascia tutto com'è). Ora vediamo di collegare tronco e foglie con rami e rametti: la forma finale dell'albero rifletterà le proprietà di simmetria dei vari pezzi della formula risolutrice, che a ogni biforcazione sono messi sotto il segno di radice.

Supponiamo per semplicità che il primo passo della formula richieda una radice quinta. Dunque il gruppo con 120 elementi si deve spezzare in cinque gruppi con 24 permutazioni ciascuno: dal tronco si dipartono cinque rami. Perché tutto funzioni, questa suddivisione deve corrispondere all'esistenza di un sottogruppo normale di ordine 5.

Ma Galois dimostrò, con il solo calcolo delle permutazioni, che *tale sottogruppo non esiste.*

Poco male, direte voi, magari siamo partiti con il piede sbagliato. Proviamo ad esempio con una radice settima. Allora il gruppo di partenza si deve suddividere in... un momento, 120 non è divisibile per 7. Dunque dobbiamo scartare anche questa strada. Facciamo le cose per bene: i divisori primi di 120 sono 2, 3 e 5. L'ultimo l'abbiamo appena scartato.

Dunque iniziamo con 3, con la radice cubica. Ahimè, anche qui non andiamo avanti: il gruppo delle 120 permutazioni non ha un sottogruppo normale di indice 3.

L'ultima speranza è la radice quadrata. Esiste un sottogruppo normale di indice 2? Per fortuna sí, ce n'è giusto uno. Contiene 60 permutazioni e i matematici lo chiamano *gruppo alterno.* Quindi, grazie alle idee di Galois, abbiamo stabilito che la formula risolutrice per la quintica deve per forza iniziare con una radice quadrata. Il tronco si divide in soli due rami. Però dobbiamo raggiungere le 120 foglie, quindi sono necessarie altre suddivisioni.

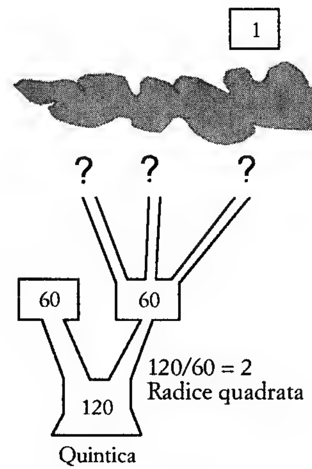
Anche 60 ha come divisori primi 2, 3 e 5. Quindi la nuova biforcazione sarà data da 2, 3 o 5 rami, cioè il passo successivo sarà una radice quadrata, cubica o di quinto grado. Dobbiamo solo vedere se il gruppo alterno ha un sottogruppo normale, e di quale indice.

La questione dell'esistenza di tale sottogruppo si può risolvere semplicemente analizzando le permutazioni, senza pensare a ciò che sta dietro. In questo modo Galois riuscí a dimostrare che il gruppo alterno *non ha sottogruppi normali* eccettuati quelli banali, il gruppo stesso e [*I*]. In matematica si dice che è un gruppo *semplice*, cioè è uno dei mattoni fondamentali con cui si possono costruire tutti gli altri.

Quindi nel nostro tronco ci sono pochi sottogruppi normali, non abbastanza per arrivare sino alle foglie con successive biforcazioni (vedi figura 7.3). E il processo di risoluzione di una quintica per radicali successivi si ferma bruscamente appena dopo il primo passo: *non c'è modo di proseguire.* L'albero cercato non esiste, dunque non esiste una formula risolutiva per radicali.

La stessa idea si può applicare alle equazioni di grado 6, 7, 8, 9..., cioè a ogni grado maggiore di 5. Ma allora perché i gradi inferiori sono risolubili? Cos'hanno di speciale i numeri 2, 3 e 4? Tralascio le spie-

Figura 7.3.
Come Galois dimostra che le quintiche non sono risolubili per radicali.



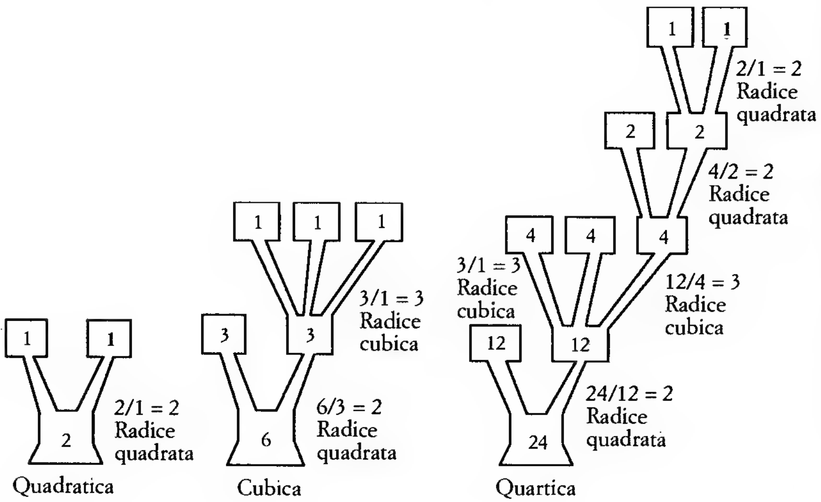
gazioni tecniche e vi mostro solo gli alberi, nella figura 7.4. Queste sequenze di sottogruppi normali corrispondono esattamente alle formule classiche.

Ora iniziamo ad apprezzare l'eleganza della teoria di Galois. Non solo dimostra che in generale la quintica non è risolubile per radicali, ma spiega anche perché le equazioni di grado inferiore lo sono e ci dice anche che forma approssimata devono avere le soluzioni. A onor del vero, con un po' di lavoro supplementare siamo in grado di scriverne la forma *esatta*. Infine, fornisce un metodo per distinguere, tra le varie equazioni specifiche di quinto grado, le risolubili da quelle che non lo sono.

Il gruppo di Galois di un'equazione ci dice tutto ciò che vogliamo sapere sulle sue soluzioni. Perché allora Poisson, Cauchy, Lacroix e tutti gli altri luminari della matematica non hanno fatto salti di gioia di fronte a questa impresa?

Perché il gruppo di Galois nasconde un oscuro segreto.

Figura 7.4.
L'uso dei sottogruppi per la risoluzione delle equazioni di grado 2, 3 e 4.



Ecco di cosa si tratta. Il modo piú semplice per calcolarlo è sfruttare le proprietà delle radici dell'equazione. Ma il fatto è che di solito queste ci sono ignote, cioè le stiamo proprio cercando.

Supponiamo che qualcuno ci sottoponga una quintica come $x^5 - 6x + 3 = 0$, o magari $x^5 + 15x + 12 = 0$, e ci chieda di stabilire a priori, con i metodi di Galois, se è risolubile per radicali o no. Sembra una domanda legittima.

La triste verità è che usando la sua tecnica, strettamente parlando, *non c'è modo di saperlo*. Possiamo dire che con ogni probabilità il gruppo associato ha 120 elementi e che l'equazione dunque non è risolubile; ma magari le radici in questo caso specifico hanno proprietà particolari e il gruppo è piú piccolo. Proprio non si sa.

Sarà anche elegante, ma la teoria di Galois ha dei forti limiti: lavora sulle radici e non sui coefficienti, cioè con gli oggetti incogniti, non con quelli noti.

Oggi tutto è piú semplice: esistono siti Internet specializzati (vedi *Bibliografia*) che calcolano il gruppo associato a partire dai coefficienti. Possiamo scoprire ad esempio che la prima delle due equazioni proposte sopra non è risolubile per radicali, mentre la seconda sí. Ovvio che il computer qui è solo uno strumento per velocizzare il processo: ciò che voglio dire è che nel frattempo altri matematici hanno capito come risolvere la questione, e che il piú grande progresso nel settore dai tempi di Galois è stato proprio la scoperta di come calcolare il gruppo associato di una qualunque equazione a partire dai coefficienti.

Il nostro eroe non era in grado di farlo. Ci sarebbe voluto un altro secolo prima che il calcolo del gruppo di Galois diventasse un compito di routine. Ma questa mancanza indusse Cauchy e Poisson al loro atteggiamento. Avevano tutte le ragioni di protestare, perché la teoria del giovane collega non dava modo di decidere a priori la risolubilità di un'equazione data.

Non si resero conto, però, che il suo metodo risolveva un problema leggermente diverso: quali proprietà devono avere le *radici* di un'equazione perché questa sia risolubile. La risposta a questa domanda era elegante e aveva profonde conseguenze. Mentre la risposta alla loro domanda... beh, è tutto fuorché elegante. Non esiste un modo semplice per classificare le equazioni sulla base di proprietà elementari dei coefficienti.

Finora il collegamento tra gruppi e simmetrie è stato in un certo senso metaforico. Ora dobbiamo renderlo piú esplicito, grazie a un punto di vista geometrico. I successori di Galois si resero conto ben presto che la relazione tra questi due concetti si intuisce molto meglio in contesti piú visuali. E in effetti agli studenti in genere si spiega il tutto partendo dalle figure geometriche.

Per farci un'idea di come stanno le cose, daremo un'occhiata al mio gruppo preferito: quello delle simmetrie di un triangolo equilatero. E affronteremo finalmente la questione di fondo: cos'è di preciso una simmetria?

Prima di Galois, le risposte a questa domanda erano vaghe e imprecise, e si appellavano a caratteristiche come l'eleganza delle proporzioni tra le parti. Capite bene che con questa roba non si produce matematica sensata. Dopo Galois, e dopo un periodo in cui i suoi colleghi districarono le idee generali alla base delle sue soluzioni specifiche, la risposta divenne semplice e univoca. Innanzitutto non si parlò piú «della» simmetria, ma di «una» simmetria. Gli oggetti non possiedono questa generica proprietà: hanno, o non hanno, una o piú simmetrie specifiche.

Dunque di che si tratta? *Una simmetria è una trasformazione che conserva la struttura di un oggetto.* Tra poco entrerò nel dettaglio, ma prima fatemi osservare che è un processo, un'azione, non una cosa. Le simmetrie di Galois sono permutazioni (delle radici di un'equazione), cioè *modi per risistemare gli oggetti.* Strettamente parlando, non sono le disposizioni in sé, ma le regole applicate per la disposizione: non il piatto, ma la ricetta.

Forse questa distinzione vi sembra troppo pignola, ma vi assicuro che è fondamentale per i nostri scopi.

Le tre parole chiave nella definizione di simmetria sono «trasformazione», «struttura» e «conservazione». Le illustrerò servendomi di un triangolo equilatero, cioè un triangolo con i lati e gli angoli uguali (gli angoli devono essere per forza di 60° l'uno). Queste caratteristiche rendono difficile distinguerli; non si può ad esempio parlare del

lato piú lungo o dell'angolo piú ampio. E come vedremo, tutto ciò è conseguenza delle sue simmetrie, anzi: è ciò che le definisce.

Ma procediamo con ordine.

Trasformazione. In linea di principio, possiamo agire sul triangolo in molti modi: piegarlo, ruotarlo di un certo angolo, appallottolarlo, tirarlo come un elastico, dipingerlo di rosa. Il secondo termine della definizione serve a limitare la scelta.

Struttura. Qui intendiamo quelle proprietà matematiche che per noi sono significative. Ad esempio: ha tre lati, i lati sono segmenti di retta, sono lunghi 18 cm, la sua posizione sul piano è questa ecc. Osserviamo che diverse branche della matematica si occupano di strutture diverse; la topologia, ad esempio, non si cura della lunghezza dei lati o del fatto che siano rettilinei, ma solo del fatto che formino insieme un circuito chiuso.

Conservazione. La struttura dell'oggetto trasformato deve essere uguale a quella di partenza. Il triangolo deve continuare a essere tale, dunque non possiamo appallottolarlo; i lati devono rimanere rettilinei, dunque non possiamo piegarlo; la lunghezza dei lati deve essere sempre 18 cm, dunque non possiamo allungarlo; la posizione nel piano non deve cambiare, dunque non possiamo farlo scivolare via.

Del colore non si fa menzione esplicita, quindi dipingere il triangolo di rosa non è proibito: è semplicemente irrilevante, non fa differenza dal punto di vista geometrico.

Vediamo una prima operazione significativa. Far ruotare il triangolo conserva alcuni elementi della sua struttura. Provate a costruirne uno di cartone, posatelo su un piano e fatelo girare: di sicuro la figura che ottenete è ancora un triangolo, con tre lati rettilinei la cui lunghezza non è cambiata. Ma la sua posizione sul piano potrebbe non essere piú la stessa. Tutto dipende dall'angolo di rotazione.

Proviamo ad esempio a girare il triangolo di un angolo retto, come in figura 7.5*a*. Il risultato è diverso dall'originale, i lati sono orientati in direzioni differenti. Se vi dicessi di chiudere gli occhi e poi, dopo averli riaperti, di dirmi se nel frattempo io abbia o meno toccato la figura, non avreste dubbi a rispondermi di sí.

Ma se avessi girato il triangolo di 120°, come in figura 7.5*b*, non sareste in grado di dire se ci sia stata o meno una manipolazione tra il «prima» e il «dopo». Per farvi capire meglio, metterò dei pallini di tre colori diversi in corrispondenza degli angoli, con l'avvertenza che sono un puro ausilio grafico, non fanno parte della struttura che si deve conservare. In questo modo, però, capiamo se qualcosa si è mosso. Se nella figura 7.5*b* non ci fossero i pallini, se il triangolo fosse un bravo oggetto puramente euclideo, allora il suo aspetto prima e dopo la rotazione sarebbe identico.

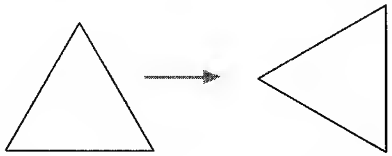
Detto in altre parole, l'azione «ruotare di 120°» è una simmetria del triangolo equilatero: una trasformazione (rotazione) che preserva la struttura (forma e posizione dell'oggetto).

Come si può vedere, il triangolo equilatero ha esattamente sei simmetrie. Oltre a quella appena vista, c'è la rotazione di 240°. Poi ci sono tre riflessioni, in cui la figura viene come ribaltata, cioè un angolo rimane fermo e gli altri due si scambiano di posto. E la sesta? È quella che lascia tutto immobile. Sarà banale, ma soddisfa la definizione di simmetria, anzi: la soddisfa per qualsiasi oggetto e struttura che possiamo immaginare. Se non si fa nulla, nulla cambia.

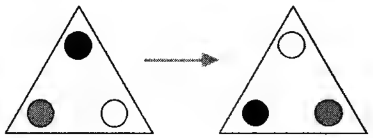
La simmetria banale si dice *identità*. Sembra insignificante, ma se la si lascia fuori dal mucchio la matematica che ne risulta diventa intrattabile, come fare addizioni senza lo zero o moltiplicazioni senza l'uno. Grazie alla sua presenza molte cose vanno a posto. Nel caso del

Figura 7.5.
(*a*) La rotazione di un angolo retto non è una simmetria per il triangolo equilatero, mentre (*b*) la rotazione di 120° sí.

(*a*)



(*b*)



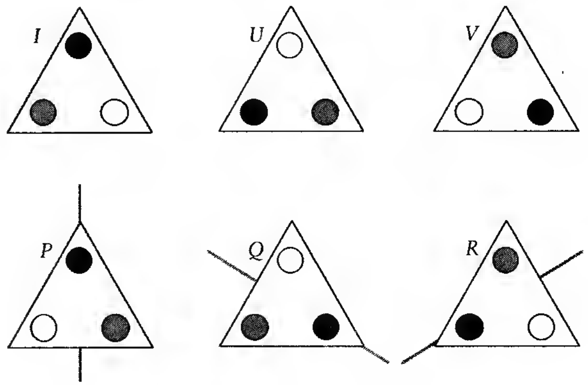
triangolo rettangolo, potete pensare l'identità come la rotazione di un angolo pari a 0°.

Nella figura 7.6 sono riassunte le sei simmetrie appena viste, la cui azione sul triangolo è visualizzata grazie ai soliti pallini. Dunque, se prendete un triangolo di cartone e lo posate su un piano, ci sono esattamente sei modi di spostarlo facendolo ritornare nella posizione originaria. Le lineette nelle tre figure in basso indicano l'asse rispetto al quale effettuare la riflessione.

Ora voglio convincervi che le simmetrie fanno parte dell'algebra. Dunque mi comporterò da bravo algebrista e mi esprimerò tramite simboli, assegnando a ciascuna simmetria una lettera: I, U, V, P, Q e R come in figura. I è l'identità, U e V sono le rotazioni, P, Q e R le riflessioni. Sono le stesse che abbiamo usato per le permutazioni; c'è un motivo valido per farlo, che tra poco sarà chiaro.

Ricordiamo la proprietà fondamentale di un gruppo enunciata da Galois e da lui applicata alle permutazioni: due azioni eseguite una dopo l'altra dànno sempre come risultato un'azione del gruppo. Questo fatto ci dà un suggerimento molto esplicito su come combinare le nostre simmetrie: proviamo a «moltiplicarle» due a due e vediamo che

Figura 7.6.
Le sei simmetrie del triangolo equilatero.



succede. Continua a valere la convenzione per cui XY è il risultato dell'azione di Y seguita da quella di X.

Partiamo ad esempio da VU. Prima applichiamo U, cioè ruotiamo il triangolo di 120°, e poi V, cioè lo ruotiamo di altri 240°. Il risultato è una rotazione di $120° + 240° = 360°$.

Accidenti, non è tra le nostre sei simmetrie.

Ma sí che c'è: è l'identità. Ruotare un triangolo di 360° lo riporta al punto di partenza, e in teoria dei gruppi conta il risultato, non la strada che avete percorso per arrivarci. Nel linguaggio delle simmetrie, possiamo dire che due di loro sono identiche se hanno lo stesso effetto sull'oggetto. Quindi a ragione scriviamo $VU = I$.

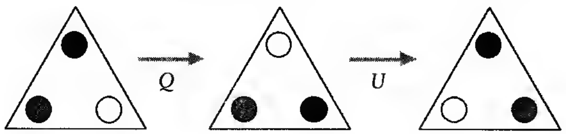
Proviamo con un altro prodotto, ad esempio UQ. Per farla breve, le cose stanno come in figura 7.7. Controllando la posizione dei pallini nella figura 7.6, riconosciamo che si tratta di P, quindi scriviamo $UQ = P$.

Se svolgiamo tutti i 36 prodotti possibili con le nostre 6 simmetrie, alla fine ci troviamo con una tavola di moltiplicazione che è esattamente uguale a quella ottenuta per le permutazioni delle radici di un'equazione cubica, in figura 7.1.

Questa apparente coincidenza è in realtà un esempio di una delle tecniche piú importanti nell'ambito della teoria dei gruppi. Il primo a proporla fu il francese Camille Jordan, il cui lavoro fu probabilmente l'atto di nascita della teoria come disciplina autonoma, non solo come metodo per analizzare le soluzioni delle equazioni.

Attorno al 1870, Jordan fu il primo ad abbozzare quella che oggi si chiama «teoria della rappresentazione». Per Galois i gruppi erano

Figura 7.7.
Come moltiplicare due simmetrie.



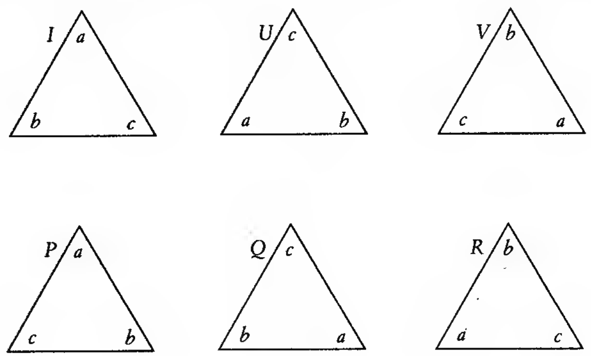
fatti di permutazioni, modi per cambiare di posto ai simboli. Jordan iniziò a pensare di «cambiar posto» in spazi piú complicati. In un generico spazio a piú dimensioni, una delle principali caratteristiche richieste è l'esistenza delle linee rette; le trasformazioni naturali in questi spazi sono quelle che le lasciano dritte, senza piegarle o torcerle, come ad esempio le rotazioni, le riflessioni e i cambiamenti di scala: queste si dicono *trasformazioni lineari*.

Il matematico (nonché giurista) inglese Arthur Cayley scoprí che tali applicazioni si potevano rappresentare con una *matrice*, una particolare tabella di numeri che si può trattare come un oggetto algebrico. Una trasformazione lineare in uno spazio a tre dimensioni, ad esempio, si può descrivere completamente con una matrice 3×3 (con 3 righe e 3 colonne) di numeri reali. Il calcolo delle azioni, quindi, si riduce a calcolo algebrico sulle matrici.

La teoria della rappresentazione ci permette di partire con un gruppo che non è fatto di trasformazioni lineari e di rimpiazzarlo con uno che lo è. Ridursi a fare calcoli sulle matrici è molto comodo, perché la loro algebra è un potente strumento che porta a risultati profondi. Jordan fu il primo ad accorgersene.

Ora vediamo le simmetrie del triangolo sotto questo nuovo punto

Figura 7.8.
Le sei simmetrie del triangolo equilatero corrispondono ad altrettante permutazioni.



di vista. Togliamo i pallini dagli angoli e mettiamoci le lettere a, b e c, proprio quelle usate per le radici dell'equazione di terzo grado (figura 7.8). È subito chiaro che ogni simmetria del triangolo è anche una permutazione di questi simboli. Tanto per fare un esempio, la rotazione U manda *abc* in *cab*.

Tra le sei simmetrie e le sei permutazioni c'è una corrispondenza naturale, e lo stesso si può dire per tutti i loro prodotti. Ma le rotazioni e le riflessioni nel piano sono trasformazioni lineari: dunque abbiamo interpretato («rappresentato») il gruppo delle permutazioni come un gruppo di applicazioni lineari o, in modo equivalente, di matrici. Questa idea avrà importanti conseguenze in matematica e in fisica.

[1] Rothman 1982.

Capitolo ottavo
L'ingegnere mediocre e il professore trascendente

Dopo Galois, la simmetria non era piú una vaga impressione di regolarità o un elemento estetico, misura di bellezza ed eleganza, ma un concetto matematico rigorosamente definito con una sua logica stringente. Con le simmetrie si potevano fare calcoli e dimostrare teoremi; nel frattempo era nata anche una nuova disciplina, la *teoria dei gruppi*. La secolare attrazione dell'umanità per la simmetria era a un punto di svolta, che richiedeva però la disponibilità a pensare in modo piú astratto. Il concetto di gruppo era decisamente rarefatto, molto distante dalla tradizionale materia prima di cui si nutriva la matematica, cioè i numeri e le forme geometriche.

I gruppi avevano già mostrato il loro valore sciogliendo un antico dilemma, la risolubilità per radicali delle equazioni di quinto grado, e presto fu chiaro a tutti che con lo stesso tipo di tecniche molti altri problemi storici avrebbero potuto essere sconfitti. Non sempre era necessario un ricorso esplicito alla teoria dei gruppi, che però stava spesso sullo sfondo anche quando sembrava di utilizzare idee del tutto diverse; c'era però sempre bisogno di grandi menti che potessero ragionare come Abel, Galois e i loro immediati successori.

Tra i problemi irrisolti che la matematica greca classica aveva lasciato ai posteri i tre piú famosi, come abbiamo già visto, erano la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio. È divertente osservare che trisezione e quadratura ancora oggi attirano l'attenzione di numerosi dilettanti allo sbaraglio, che sembra non abbiano ben chiaro il significato della parola «impossibile», soprattutto se pronunciata da un matematico. La duplicazione, chissà perché, pare esercitare minor fascino.

Noti collettivamente come i tre «problemi classici dell'antichità», non hanno però lo status di problema capitale della matematica, come ad esempio l'ultimo teorema di Fermat, che ha sfidato le migliori menti per 350 anni e che è sempre stato esplicitamente riconosciuto come questione irrisolta, con una precisa data di nascita e con una risposta assai probabile, che andava tuttavia dimostrata.

I tre problemi classici sono tutta un'altra cosa. Non sono stati segnalati appositamente da Euclide come dilemmi meritevoli di attenzione; esistono per cosí dire di default: sono le ovvie estensioni di tecniche e teoremi noti, che però per qualche motivo la matematica classica ha sempre ignorato. Euclide non ne parla, probabilmente, perché all'epoca nessuno sapeva come risolverli. I Greci pensavano forse che una soluzione potesse esistere? Se sí, non l'hanno mai dato troppo a vedere. Un genio come Archimede deve aver per forza pensato che con riga e compasso non si approdasse a nulla in quei casi, tanto da inventare tecniche alternative; ma non c'è alcuna prova del fatto che il matematico siracusano considerasse il problema della costruzione importante in sé.

In età moderna le cose cambiarono. La mancata soluzione dei tre problemi classici faceva intuire una lacuna importante nelle nostre teorie. Si erano diffusi nella comunità matematica come temi in un certo senso «folkloristici», passati di generazione in generazione, ma al tempo della loro definitiva soluzione erano ormai circondati da un'aura di grande importanza storica e culturale. Lo svelamento finale dell'enigma, soprattutto nel caso della quadratura del cerchio, fu salutato come un punto di svolta. Comunque sia andata, oggi conosciamo le risposte, che sono in tutti i tre casi dei sonanti «no, non si può fare». Perlomeno con riga e compasso.

Può sembrare un risultato fine a se stesso. In molti aspetti della nostra vita, cerchiamo di risolvere i problemi e superare le difficoltà con il meglio che abbiamo a disposizione. Se un edificio di molti piani non sta in piedi con calce e mattoni, passiamo al cemento armato e all'acciaio. Nessun ingegnere è diventato famoso per aver dimostrato scientificamente che con i mattoni non si costruiscono grattacieli.

In matematica le cose vanno diversamente. I vincoli sugli strumenti che possiamo utilizzare spesso sono importanti quanto il risultato. La rilevanza di un problema a volte non dipende dalla risposta in sé, ma dal motivo per cui è negativa o positiva. E cosí è stato anche per i tre problemi classici dell'antichità.

La bestia nera dei trisettori della domenica nacque a Parigi nel 1814: si chiamava Pierre-Laurent Wantzel. Suo padre era un ufficiale dell'esercito che sarebbe poi diventato professore di matematiche applicate all'École Spèciale du Commerce. Il piccolo Pierre si rivelò un bambino prodigio: Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant, celebre ingegnere francese amico di famiglia, scrisse che il ragazzino mostrava un «sorprendente talento per la matematica, disciplina su cui si documenta leggendo con grande interesse molti libri. Ha già superato il suo maestro; all'età di nove anni veniva chiamato a risolvere i problemi piú difficili di triangolazione che questi non sapeva affrontare».

Nel 1828 Pierre fu ammesso al Collège Charlemagne. Tre anni dopo si diplomò con il primo premio in latino e francese, sostenne l'esame di ammissione sia all'École Polytechnique sia all'École Normale e li passò entrambi, primo candidato della storia a riuscirci. Non c'era argomento che non gli interessasse: matematica, musica, filosofia, storia. Soprattutto, gli piacevano i dibattiti appassionati.

Nel 1834 decise di dedicarsi all'ingegneria, entrando all'École des Ponts et Chaussées. Ma ben presto confessò agli amici di essersi sbagliato, che sarebbe diventato solo un «ingegnere mediocre». Si prese un anno di congedo e capí che la sua strada era l'insegnamento. E cosí fu: nel 1838 iniziò a tenere corsi di analisi all'École Polytechnique; tre anni dopo fu nominato professore di meccanica applicata all'École des Ponts et Chaussées. Secondo de Saint-Venant, «Pierre preferiva lavorare di sera e si coricava a ora molto tarda. Prima di concedersi qualche ora di sonno agitato, si metteva a leggere. Abusava di caffè e di oppio, mangiava alle ore piú strane, perlomeno fino a quando non prese moglie». Si sposò con la figlia del suo vecchio professore di latino.

Wantzel si applicò allo studio dei lavori di Ruffini, Abel, Galois e Gauss, interessandosi soprattutto alla teoria delle equazioni. Nel 1837 pubblicò sul «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées», diretto da Liouville, un articolo di ricerca, il cui titolo tradotto suona «Sui modi di verificare se un problema geometrico possa essere risolto con riga e compasso»: il suo lavoro ripartiva dal punto in cui Gauss si era fermato nella teoria della costruibilità. Morí a soli trentatre anni, nel 1848, probabilmente a causa del troppo stress e dei troppi incarichi accumulati.

La dimostrazione di Wantzel dell'impossibilità di trisecare l'angolo e duplicare il cubo somiglia al famoso lavoro di Gauss sui poligoni regolari, ma è concettualmente molto piú semplice. Iniziamo dal cubo, il caso piú chiaro. La domanda è: si può costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$?

Le ricerche di Gauss sui poligoni regolari si basavano sull'idea che ogni costruzione geometrica fosse equivalente alla soluzione di una serie di equazioni quadratiche, fatto che considerava automaticamente assodato, perché segue dalle proprietà delle rette e dei cerchi. Con qualche calcolo algebrico non troppo complesso si mostra che una quantità costruibile deve avere *polinomio minimo* di grado pari a una potenza di due: 2, 4, 8, 16, 32 ecc. Il polinomio minimo non è altro che l'equazione piú semplice, a coefficienti razionali, di cui la quantità in oggetto è la soluzione.

Ma $\sqrt[3]{2}$ soddisfa l'equazione $x^3 - 2 = 0$, che si dimostra essere il suo polinomio minimo. Se allora ammettiamo per assurdo che $\sqrt[3]{2}$ sia costruibile, siamo costretti ad affermare, per necessità logica, che 3 è una potenza di 2, il che è palesemente falso. Abbiamo dunque dimostrato che non può esistere una costruzione con riga e compasso di $\sqrt[3]{2}$.

L'impossibilità della trisezione dell'angolo si dimostra con metodi simili, anche se un po' piú complessi.

Tanto per iniziare, ci sono angoli che si lasciano trisecare senza difficoltà, come ad esempio 180°, la cui terza parte è 60°, angolo di facile costruzione perché è quello dell'esagono regolare. Ma se proviamo a dividere questo angolo a sua volta in tre parti, ottenendone uno di 20°, scopriamo che è impossibile, come vi dimostrerò fra un attimo.

Pensandoci bene, è un duro colpo. Quando usiamo un goniometro ci fidiamo ovviamente delle sue tacche, che segnano senza problemi angoli di 10°, 20° ecc. Però sono tutte misure approssimate, e non solo perché la tacca ha necessariamente uno spessore. Ovvio che per un qualsiasi problema ingegneristico o architettonico la precisione ottenibile va perfettamente bene, ma dal punto di vista matematico si

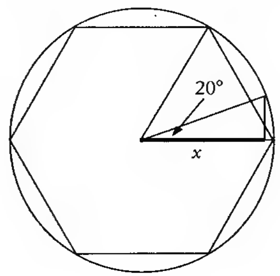
può provare in modo inappellabile che la costruzione di un angolo di 20° non si può ottenere in alcun modo con i classici metodi euclidei.

Per la dimostrazione è necessario conoscere un po' di trigonometria, la branca della matematica che si occupa delle proprietà quantitative degli angoli. Partiamo da un cerchio di raggio unitario e costruiamo l'esagono in esso inscritto, i cui angoli al centro sono tutti di 60°, come si vede nella figura 8.1. La trisezione equivale dunque a trovare un angolo di 20°, cioè a costruire il segmento x in figura, segnato in grassetto.

Grazie a teoremi di trigonometria che qui non sto a spiegare, x deve necessariamente soddisfare l'equazione $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Si dimostra che questo è il polinomio minimo di x, che ha grado 3 proprio come nel caso della duplicazione del cubo. Allo stesso modo in cui abbiamo concluso il caso precedente, possiamo senz'altro affermare che il segmento x non è costruibile con riga e compasso.

Qui l'ho fatta molto semplice, ma dietro a queste dimostrazioni ci sono profonde strutture matematiche astratte. La soluzione di Wantzel di questi due classici problemi dell'antichità fa affidamento, sotto sotto, a questioni di simmetria: il gruppo di Galois dei polinomi minimi associati a certi enti geometrici ha una struttura tale da non permettere le costruzioni con riga e compasso. Wantzel stesso conosceva bene la teoria di Galois, tanto da presentare nel 1845 una nuova dimostrazione dell'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di grado maggiore o uguale a 5. Era basata su molte idee di Ruffini e di

Figura 8.1.
La trisezione di un angolo di 60° equivale alla costruzione del segmento x.



Abel, ma risultava piú semplice da seguire e maggiormente illuminante su certi punti. Si legge nella prefazione:

> Anche se la dimostrazione [di Abel] risulta alla fine essere corretta, è presentata in forma cosí complessa e generica da non essere accettata da tutti. Molti anni prima, Ruffini [...] aveva trattato la stessa questione con metodi ancora meno chiari [...] Studiando in modo approfondito le ricerche di questi due matematici, siamo arrivati a una dimostrazione che sembra essere rigorosa, in grado di dissipare i dubbi residui che ancora aleggiano su questo importante teorema della teoria delle equazioni.

Per vincere definitivamente la sfida con i tre problemi classici dell'antichità mancava solo la quadratura del cerchio, compito che è equivalente alla costruzione con riga e compasso di un segmento lungo *esattamente* π. Dimostrarne l'impossibilità si è rivelato molto piú difficile. Perché? Perché contrariamente alle quantità viste prima, π non ha un polinomio minimo di grado sbagliato, ma proprio non ne ha nessuno: non esiste un'equazione di qualsivoglia grado, a coefficienti razionali, la cui soluzione sia π. Ce ne sono molte che la portano come soluzione approssimata, con il grado di precisione voluto, ma nessuna che l'abbia come radice esatta.

I matematici dell'Ottocento si resero conto che la semplice distinzione tra numeri razionali e irrazionali non era piú sufficiente in questo caso. Alcuni irrazionali erano piú «trattabili» di altri, come ad esempio $\sqrt{2}$, perché si lasciavano rappresentare in termini di equazioni a coefficienti razionali (in questo caso come soluzione di $x^2 - 2 = 0$). Numeri di questo tipo furono batttezzati *algebrici*.

Ben presto ci si accorse che in linea di principio potevano esistere numeri non algebrici, il cui legame con i razionali era tenue e indiretto: «trascendevano» il regno dei numeri piú familiari e dunque furono chiamati *trascendenti*.

A quel punto, però, bisognava scoprire se i numeri trascendenti esistessero davvero. Prima che Ippaso li svegliasse dal loro sogno a occhi aperti, i Greci credevano addirittura che non esistessero numeri irrazionali. Secondo la leggenda, Pitagora si infuriò a tal punto per questa scoperta che fece gettare a mare lo scopritore (altro che «ambasciator non porta pena»!); piú verosimilmente, il povero Ippaso fu solo espulso dalla setta pitagorica. I matematici dell'Ottocento erano meno ingenui e si

aspettavano da un momento all'altro la scoperta del primo numero non algebrico, ma per parecchi anni non si presentò nessun Ippaso redivivo. Il compito era chiaro: dimostrare che π, il candidato piú probabile, non era soluzione di nessuna equazione a coefficienti razionali. Ma già dimostrare la sua irrazionalità si stava rivelando molto complicato, figuriamoci il resto. Per provare che π è irrazionale si deve mostrare che non è il risultato della divisione di nessuna coppia di numeri razionali; per provare che non è algebrico si deve mostrare che non è la soluzione di nessuna equazione a coefficienti razionali di qualsivoglia grado. Capite bene che è molto piú complicato.

Il primo risultato di peso fu ottenuto nel 1768 da Johann Lambert, matematico e astronomo tedesco, che in una sua memoria riuscí finalmente a dimostrare l'irrazionalità di π, grazie a un metodo nuovo che avrebbe spianato la strada ad altri successi. Il metodo si basava essenzialmente sull'analisi matematica, soprattutto sugli integrali (l'integrale di una funzione è, in soldoni, un'altra funzione, legata alla prima dalla velocità con cui cambiano i suoi valori). Supponendo per assurdo che π fosse uguale a una certa frazione, Lambert arrivava a calcolare un complicato integrale, inventato alla bisogna, pieno di polinomi e funzioni trigonometriche. Alla fine dei conti si ritrovava con un'affermazione del tipo «un qualche numero diverso da zero è uguale a zero».

Abbiamo già visto come si concludono queste dimostrazioni per assurdo. Se π fosse razionale, saremmo costretti ad ammettere la validità di una cosa palesemente falsa. Per cui possiamo dire con sicurezza che il presupposto non è vero: π è irrazionale.

I dettagli sono molto tecnici, ma la strategia è interessante. Per collegare π a una quantità piú malleabile, Lambert fece ricorso alla trigonometria; poi sistemò le cose in modo da ottenere un risultato particolare di un certo calcolo nel caso π fosse razionale, e qui gli venne l'idea dell'integrale. Fatto questo, risolse l'integrale con due metodi diversi e mostrò che dava risultati diversi: una volta zero e l'altra, appunto, un numero diverso da zero. Questa era la parte assai tecnica, ma non particolarmente difficile concettualmente, almeno per un matematico esperto.

La dimostrazione di Lambert fu un grande passo avanti, ma la meta era ancora lontana: tantissimi numeri razionali sono algebrici e costruibili con riga e compasso. Per costruire $\sqrt{2}$, ad esempio, basta prendere la diagonale di un quadrato di lato unitario. Sulla costruibilità di π, dunque, non si poteva affermare ancora nulla. Era diventato chiaro che cercare una frazione il cui risultato fosse esattamente π era una perdita di tempo, ma nulla piú.

Arrivata a questo punto, la matematica si trovò in una curiosa situazione di stallo. Si era proposta la distinzione tra numeri algebrici e trascendenti, che si pensava fosse importante, ma ancora non si era dimostrato che questa seconda classe fosse non vuota. In termini pratici, la classificazione avrebbe potuto rivelarsi priva di senso.

La soluzione del dilemma arrivò solo nel 1844, grazie a Liouville, lo stesso che aveva salvato gli appunti di Galois dalla pattumiera accademica (e reale). Il numero trascendente da lui proposto aveva questa forma:

0,110001000000000000000001000...

era cioè un numero decimale fatto di 0 e 1, in cui gli 1 erano separati da file sempre piú lunghe di 0, la cui lunghezza (era questo il punto cruciale) aumentava con grande rapidità.

Numeri come questo sono «quasi razionali», cioè si possono approssimare con altissima precisione grazie alla loro struttura. Ad esempio, la presenza di quei 17 zeri nel numero scritto sopra implica che ciò che viene prima, 0,110001, è un'approssimazione razionale migliore di qualsiasi altra concepibile (è razionale come tutti i numeri decimali finiti: è infatti uguale a 110001/100000), essendo esatta fino alla 23ª cifra decimale: infatti la cifra successiva diversa da 0 è l'1 che si trova alla 24ª posizione.

Liouville capí un fatto importante: in generale i numeri algebrici ammettevano *cattive* approssimazioni razionali, in cui era necessario usare frazioni con numeri enormi al denominatore per avvicinarsi fino a parecchie cifre decimali. Il suo numero, invece, era concepito proprio per avere approssimazioni innaturalmente buone: era troppo strutturato per essere algebrico, dunque doveva essere trascendente.

La critica che si può muovere all'ingegnoso metodo di Liouville è una sola: il suo numero è troppo artificiale, privo di rapporti diretti

con qualsiasi altro ente matematico. Spunta dal nulla, è costruito per un solo scopo, quello di essere troppo ben approssimato dalle frazioni razionali. L'unica sua virtú è che permette di dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti. Perlomeno, ora si poteva stare tranquilli: la classificazione ipotizzata aveva senso.

Fortificati da questa certezza, si trattava adesso di trovare un trascendente di qualche interesse. Il solito sospetto ritornava sulla scena: π faceva parte di questa categoria? Se lo si fosse provato, il problema della quadratura del cerchio sarebbe stato spazzato via con un sol gesto. I numeri costruibili devono essere algebrici, dunque nessun numero trascendente è costruibile: se π è trascendente non c'è modo di quadrare il cerchio.

Il rapporto fra diametro e circonferenza, π, è giustamente famoso per il suo legame con la geometria di cerchi e sfere. Eppure la matematica è piena di numeri altrettanto interessanti. Il piú importante, forse anche piú di π, si chiama e, vale circa 2,71828 ed è anch'esso irrazionale. La sua data di nascita è il 1618, la sua culla la teoria dei logaritmi; tra i suoi meriti, serve per calcolare il tasso d'interesse composto per intervalli molto piccoli. In un primo tempo fu battezzato b (cosí perlomeno lo scriveva Leibniz in una lettera a Huygens nel 1690), per poi diventare e grazie a Eulero, che lo usò per la prima volta in un manoscritto del 1727 e in un'opera a stampa, la *Meccanica*, nel 1736. Grazie alla sua abilità di calcolo con i numeri complessi, Eulero scoprí una notevole relazione tra e e π, spesso citata come «la formula piú bella di tutta la matematica»: dimostrò infatti che $e^{i\pi} + 1 = 0$ (non è difficile arrivarci, ma bisogna conoscere un po' di analisi).

Tornando alla nostra storia, dopo la scoperta di Liouville passarono altri ventinove anni, fino a quando, nel 1873, il francese Charles Hermite dimostrò che e era trascendente. La carriera di questo matematico presenta molti paralleli con quella di Galois: frequentò il Louis-le-Grand, ebbe come professore Richard, cercò in gioventú di dimostrare la non risolubilità per radicali delle equazioni di quinto grado e sostenne l'esame di ammissione all'École Polytechnique. Al contrario del suo sfortunato predecessore, però, riuscí a entrare per il rotto della cuffia.

Il piú celebre studente di Hermite, Henri Poincaré, scrisse a proposito del maestro: «Non si poteva certo chiamarlo un uomo logico! Nulla di piú lontano dalla verità: i concetti sembravano nascergli in mente in modi strani e misteriosi». La sua originalità di pensiero gli fu molto utile nella dimostrazione, che era una complessa rielaborazione del metodo di Lambert. Anche in questo caso, grazie all'analisi matematica, si scriveva un particolare integrale e lo si calcolava con due modi distinti, scoprendo che l'ipotesi che e fosse algebrico portava a due risultati diversi: zero risultava uguale a un numero diverso da zero. La difficoltà, naturalmente, era tutta nel trovare l'integrale giusto.

L'intera dimostrazione occupava due sole pagine a stampa, ma due pagine magnifiche per eleganza di pensiero. L'integrale era cosí improbabile che altri non avrebbero potuto trovarlo anche se l'avessero cercato una vita.

Finalmente si era dimostrato che un numero come e, oggetto «naturale» di studio in matematica, nonché elemento cardine dell'analisi reale e complessa, era trascendente. Hermite non aveva sciolto il nodo di π, ma perlomeno aveva fatto un grande passo avanti rispetto all'esempio artificiale di Liouville. Ora c'era la consapevolezza che nella matematica di tutti i giorni saltavano fuori numeri ragionevoli e utili, ma non algebrici. Da lí a poco qualcuno avrebbe usato le idee di Hermite per dimostrare finalmente che uno di questi era proprio π.

Carl Louis Ferdinand von Lindemann nacque nel 1852, figlio di Ferdinand, un insegnante di lingue, e di Emilie Crusius, figlia di un preside di scuola (in seguito il padre avrebbe cambiato lavoro, diventando direttore di un'azienda del gas).

Come molti studenti nella Germania di quegli anni, Lindemann compí gli studi in varie università alla ricerca dei professori migliori: nel suo caso Gottinga, Monaco ed Erlangen, dove ottenne un dottorato con una tesi sulle geometrie non euclidee, relatore il celebre Felix Klein. Si recò poi a Oxford, Cambridge e Parigi, dove incontrò Hermite. Nel 1879, dopo aver ottenuto l'abilitazione, fu nominato professore all'Università di Friburgo. Quattro anni dopo si trasferí a Königsberg, dove conobbe l'attrice Elizabeth Küssner, anche lei figlia di un insegnante, e la sposò. Dieci anni piú tardi ottenne una cattedra all'Università di Monaco.

Nel 1882, a metà strada tra Parigi e Königsberg, Lindemann capí

come estendere il geniale metodo di Hermite per dimostrare la trascendenza di π, cosa che gli diede la fama. Secondo alcuni storici della matematica, si trattò di un semplice colpo di fortuna da parte di uno studioso non eccezionale che si era imbattuto per caso nella giusta strada. Ma come disse un giorno un famoso golfista: «Meglio gioco, piú divento fortunato». E questo fu probabilmente il caso di Lindemann.

In seguito la sua carriera si indirizzò verso la fisica matematica e lo studio dell'elettrone. Il suo allievo piú celebre fu David Hilbert.

Dunque la dimostrazione di Lindemann usava la tecnica inventata da Lambert e perfezionata da Hermite: scrivere un opportuno integrale, calcolarlo con due metodi diversi, mostrare che dall'ipotesi che π sia algebrico discendono due risultati incompatibili. L'integrale da lui trovato era simile a quello di Hermite, ma ancora piú complicato, legato al precedente proprio dall'elegante relazione di Eulero tra e e π. Nel suo lavoro, egli dimostra che se π fosse algebrico allora e dovrebbe avere nuove e strane proprietà (analoghe all'essere algebrico, ma non proprio uguali), il che non è vero. Il vero nucleo della dimostrazione è e, non π.

Con il lavoro di Lindemann si chiudeva un capitolo della matematica e se ne apriva un altro. Il fatto che non si potesse quadrare il cerchio non era che un effetto collaterale: la cosa importante era che finalmente se ne conosceva la ragione profonda. I ricercatori avrebbero sviluppato da quel momento una nuova teoria dei numeri trascendenti, che ancora oggi è un campo di studi attivo, per quanto terribilmente difficile: anche le congetture piú innocue e realistiche in materia non sono ancora state dimostrate.

Armati delle intuizioni di Abel e Galois, possiamo tornare al problema della costruzione dei poligoni regolari, chiedendoci in generale: per quali valori di n si può costruire con riga e compasso l'n-agono regolare? La risposta è sorprendente.

Nelle sue *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss aveva scritto quelle che pensava fossero condizioni necessarie e sufficienti perché ciò avvenisse, ma aveva dimostrato solo che erano sufficienti. Sosteneva di aver completato la prova, ma la nuova versione, come buona parte del suo lavoro, non fu mai pubblicata. Comunque sia, la parte difficile dell'opera era fatta; a Wantzel, nella sua memoria del 1837, toccò solo occuparsi dei dettagli mancanti.

Ritorniamo al grande successo del giovane Gauss, il poligono con 17 lati. Che cos'ha di speciale il numero 17? Cosa lo differenzia da 11 o 13?

Cominciamo a osservare che stiamo parlando di numeri primi. È facile provare che se un n-agono è costruibile, sono costruibili tutti i p-agoni con p divisore primo di n: basta prendere all'interno del poligono piú grande solo gli n/p angoli opportuni. Ad esempio, da un 15-gono si ricava con facilità il pentagono. È allora sensato limitarsi a considerare i valori primi, che servono da mattoni per la costruzione completa.

Torniamo a 17, che è appunto primo. La teoria di Gauss, riformulata in termini moderni, si basa sul fatto che le soluzioni dell'equazione $x^{17} - 1 = 0$ nel piano complesso sono i vertici di un poligono regolare con 17 lati. Una di queste soluzioni è ovviamente $x = 1$, le altre 16 sono le radici del polinomio $x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x^2 + x + 1$. Per trovarle bisogna risolvere una serie di equazioni di secondo grado, e tutto funziona perché 16 è una potenza di 2 ($2^4 = 16$), il cui esponente è a sua volta una potenza di 2: quindi $16 = 2^{2^2}$.

Lo stesso ragionamento vale nel caso generale: se p è primo (dispari, cioè diverso da 2), il poligono regolare con p lati è costruibile se e solo se $p - 1$ è della forma 2^{2^k} per qualche k. I numeri dotati di questa particolare proprietà si dicono *numeri di Fermat*, perché fu lui il primo a studiarli. La costruzione del triangolo e del pentagono, già nota ai Greci, è possibile perché $3 = 2 + 1$, e $5 = 2^2 + 1$, cioè perché 3 e 5 sono i piú piccoli primi di Fermat. Invece 7 non si può scrivere allo stesso modo, e infatti l'eptagono regolare non è costruibile.

Con qualche calcolo in piú si arriva al risultato finale: il poligono regolare di grado n è costruibile se e solo se n è una potenza intera di 2 o il prodotto di una potenza di 2 e di uno o piú primi di Fermat.

Il che sposta la questione piú in là: quali sono i numeri di Fermat? I primi tre li abbiamo già visti: 3, 5 e 17. I due successivi sono molto piú grandi: 257 e 65537. E poi basta, non se ne conoscono altri. Nessuno è mai riuscito a dimostrare che esistono, o al contrario che non esistono. Per quel che ne sappiamo, il prossimo, eventuale numero di Fermat deve essere maggiore o uguale di $2^{33554432} + 1$, dove $33\,554\,432 = 2^{25}$, che ha piú di dieci milioni di cifre. Anche dopo il teorema di classificazione definitivo, ancora non conosciamo con esattezza tutti i poligoni regolari costruibili, ma la nostra lacuna dipende solo dall'esistenza di uno o piú numeri colossali.

A onor del vero, Gauss dimostrò che il 17-agono era costruibile, ma non ne esibí una costruzione esplicita, anche se dedusse correttamente che si trattava di arrivare a un segmento lungo:

$$\frac{1}{16}\left[-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})}\right]$$

Poiché si può sempre ricavare la radice quadrata di una quantità con riga e compasso, anche questo numero cosí complesso è in realtà costruibile. Ulrich von Huguenin scrisse nel 1803 la prima procedura esplicita per farlo, e nel 1893 Herbert William Richmond ne scoprí una versione semplificata.

Nel 1832 Friedrich Julius Richelot pubblicò una serie di memorie in cui descriveva la costruzione esplicita di un poligono con 257 lati, il cui titolo in latino fa impressione quasi quanto il risultato: *De resolutione algebraica aequationis $x^{257} - 1 = 0$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.*

Secondo una leggenda metropolitana, a uno studente molto pignolo fu affidata come tesi di dottorato la costruzione del poligono con 65537 lati, impresa che lo tenne impegnato per vent'anni. La verità è quasi altrettanto strana: Johann Gustav Hermes, dell'Università di Lingen, dedicò dieci anni all'opera, che, finita nel 1894, ora giace nel fondo manoscritti dell'Università di Gottinga. Putroppo John Horton Conway, forse l'unico matematico vivente che ci abbia dato un'occhiata, pensa che non sia del tutto corretta.

Capitolo nono
Il graffitaro ubriaco

William Rowan Hamilton fu il piú grande matematico d'Irlanda. Nacque allo scoccare della mezzanotte fra il 3 e il 4 agosto 1805 e non decise mai quale fosse la data del suo compleanno: in genere preferiva il 3, ma la lapide sulla tomba reca scritto il 4, perché negli ultimi anni di vita scelse quel giorno per ragioni sentimentali. Fu un grande linguista, un genio matematico e un alcolizzato. Si accinse all'impresa di inventare un'algebra tridimensionale ma si accorse, con un'illuminazione improvvisa che lo spinse a incidere una formula su un ponte, che per far funzionare il tutto erano necessarie non tre ma quattro dimensioni. Le sue ricerche avrebbero cambiato per sempre l'algebra, nonché il modo in cui intendiamo lo spazio e il tempo.

La sua famiglia di origine era agiata. Il padre, Archibald, era un avvocato assai portato per gli affari. Gli piaceva molto bersi un bicchierino (o meglio, cinque o sei) ogni tanto, il che lo rendeva simpatico all'inizio e imbarazzante con il trascorrere delle ore. Era un uomo facondo, intelligente e religioso, tutti tratti che avrebbe passato al figlio, insieme con l'amore per l'alcol, purtroppo. La madre, Sarah Hutton, era forse ancora piú brillante del marito e veniva da una famiglia di intellettuali, ma la sua influenza sul figlio si limitò al corredo genetico o poco piú: non appena ebbe compiuto tre anni, il piccolo William fu spedito dallo zio James, che si sarebbe occupato della sua istruzione. Questi era un curato, nonché un celebre linguista, e i suoi interessi indirizzarono in modo deciso l'educazione del nipote.

I risultati furono impressionanti, ma anche maniacali. A cinque anni William conosceva già greco, latino ed ebraico. A otto aveva aggiunto francese e italiano. A dieci, arabo e sanscrito. Nel corso degli anni sarebbero seguiti corsi di persiano, siriano, hindi, malese, marathi e bengalese. Il tentativo di affrontare anche il cinese venne frustrato dalla mancanza di testi adeguati: James si lamentò del fatto che gli era costata una bella somma «fare arrivare tutti quei libri da Londra, ma spero che si rivelerà denaro ben speso».

Per fortuna sua e della scienza, William fu salvato da chissà quali altre lingue grazie all'incontro con Zerah Colburn. Questi era un americano dotato di quel misterioso talento che fa sembrare certe persone delle calcolatrici viventi, capaci di fare conti a mente con grande velocità e precisione. Alla domanda: «Qual è la radice cubica di 1860867», Colburn era in grado di rispondere istantaneamente: «123».

Questa peculiarità è ben distinta dal vero talento per la matematica, cosí come il conoscere perfettamente la grammatica e l'ortografia di una lingua non garantisce di trasformarci in grandi narratori. Se si eccettua Gauss, nelle cui carte si trovano pagine e pagine di conti giganteschi, pochi tra i grandi del passato potevano vantare una particolare abilità nel calcolo rapido. Erano sicuramente competenti, come dovevano essere in un'epoca priva di computer, ma non piú di un bravo contabile. C'è da dire che, anche oggi, i cari vecchi calcoli con carta e penna non sono spariti del tutto, anzi: spesso affrontare un problema a mano consente di apprezzare i concetti con maggior profondità, grazie all'osservare nero su bianco i simboli e le cifre che cambiano e mutano di posto. Ma con il software appropriato (che spesso è scritto da un matematico) e con un allenamento minimo, anche chi è completamente digiuno della materia oggi potrebbe fare le scarpe a Colburn e ai suoi simili. Senza per questo avvicinarsi neanche lontanamente alle imprese di Gauss.

Colburn non capiva sino in fondo la natura dei trucchi e delle scorciatoie che usava, anche se si rendeva conto che la sua notevole memoria era molto importante. Fu presentato a Hamilton nella speranza che il giovane genio potesse fare luce su quelle tecniche misteriose; e cosí fu: William riuscí persino a suggerirgli miglioramenti strategici e nuovi trucchetti. Partito Colburn, Hamilton capí di aver trovato un campo del sapere in cui avrebbe potuto applicare degnamente le sue straordinarie capacità mentali.

A diciassette anni aveva già letto quasi tutte le opere dei maestri del passato ed era già in grado di calcolare da solo le date delle eclissi. Le lingue classiche continuavano a occupare la maggioranza del suo tempo, ma la matematica era diventata la vera passione dominante. Ben presto arrivarono i primi risultati originali. Il diciannovenne Gauss aveva dimostrato la costruibilità del poligono regolare con 17 lati; il diciassettenne Hamilton, invece, fece una scoperta straordinaria nel campo della meccanica, svelando un'identità matematica tra questa scienza e l'ottica. I primi cenni relativi a questa idea sono contenuti in una criptica lettera alla sorella Eliza, ma siamo certi che già allora i concetti gli fossero ben chiari grazie a un'altra lettera, posteriore, al cugino Arthur.

Era un risultato sorprendente. La meccanica era lo studio dei corpi in movimento, dalle palle di cannone sparate su traiettorie paraboliche, ai pendoli oscillanti con regolarità, fino ai pianeti orbitanti su vaste ellissi attorno al Sole. L'ottica invece riguardava la geometria dei raggi luminosi, riflessioni e rifrazioni, arcobaleni, prismi e telescopi. Che i due campi fossero correlati era già una bella sorpresa; che fossero in pratica *la stessa cosa* era davvero incredibile.

Incredibile ma vero, e grazie a questa identità si sarebbe sviluppata la teoria che oggi usano i fisici matematici non solo nei campi della meccanica e dell'ottica ma anche della meccanica quantistica: quella dei sistemi hamiltoniani. La loro caratteristica principale è data dal fatto che al loro interno le equazioni di moto si derivano a partire da una sola quantità che rappresenta l'energia totale, detta *hamiltoniana* del sistema. Le incognite delle equazioni non sono solo le posizioni dei punti che si muovono ma anche la loro *quantità di moto*, una misura della velocità. Altra interessante caratteristica è che non dipendono dalla scelta delle coordinate. Almeno in matematica, la verità è bellezza: e qui la teoria è tanto elegante quanto vera.

La fortuna di Hamilton, rispetto perlomeno a Galois o Abel, fu quella di vedere riconosciute le sue straordinarie capacità fin da subito. Nessuno si sorprese quando, nel 1823, passò l'esame per entrare nella piú prestigiosa università d'Irlanda, il Trinity College di Dublino, risultando primo tra cento candidati. Nel corso degli studi vinse premi su premi e, soprattutto, finí la prima parte della sua opera capitale dedicata all'ottica.

Nella primavera del 1825 Hamilton scoprí le grazie del gentil sesso, nella persona di una certa Catherine Disney. Scioccamente, la corteggiò scrivendole un mucchio di poesie, e l'accorta ragazza reagí sposando un ricco pastore protestante, piú vecchio di lei di quindici anni, uso a trattare le gentili donzelle in forme forse meno romantiche ma piú concrete. Per William fu un colpo durissimo, tanto che, dimentico dei suoi profondi sentimenti religiosi, pensò addirittura di annegarsi, commettendo cosí il peccato mortale del suicidio. Per fortuna non lo fece, limitandosi ad annegare la sua infelicità componendo qualche altro verso.

La poesia era la sua passione, e non pochi tra i suoi amici erano uomini di lettere. Fu intimo di William Wordsworth, frequentò Samuel Taylor Coleridge e si circondò di noti poeti e scrittori. Wordsworth rese un buon servizio all'umanità quando fece notare con molto tatto all'amico che i suoi migliori talenti non erano quelli poetici: «Mi avete inondato di versi su versi, che ho ricevuto con molto piacere [...] eppure temo che questo impegno vi possa distogliere dal cammino della scienza [...] Oso dunque farvi presente che forse gli aspetti piú poetici della vostra natura potrebbero trovare una piú felice espressione nei campi della prosa».

Hamilton rispose che la vera poesia si trovava nella matematica e saggiamente si concentrò su quella. Nel 1827, ancora studente, gli fu affidata all'unanimità la cattedra di astronomia al Trinity, il cui titolare si era dimesso in quanto nominato vescovo di Cloyne. Il giovane dimostrò che la fiducia in lui era ben riposta pubblicando la prima parte del suo trattato di ottica (argomento del tutto pertinente in astronomia, visto che sta alla base del funzionamento dei telescopi).

In queste prime pagine il collegamento con la meccanica è presente solo in forma embrionale; si parla soprattutto di ottica geometrica, cioè del modo in cui i raggi luminosi cambiano direzione quando intercettano una lente. In seguito, con la teoria ondulatoria della luce, i raggi rettilinei sarebbero stati sostituiti dai «fronti d'onda», che rendevano conto di molti altri fenomeni, soprattutto la diffrazione, e che grazie al meccanismo dell'interferenza spiegavano caratteristiche come la penombra e la diffusione luminosa lungo direzioni apparentemente non rettilinee.

L'ottica geometrica non era certo un settore di ricerca nuovo, visto che già molti scienziati del passato se ne erano occupati, da Fermat fino ad Aristotele. Hamilton però intervenne nello stesso modo in cui

Legendre era intervenuto nel campo della meccanica: si sbarazzò della geometria e la rimpiazzò con l'algebra e l'analisi, sostituendo le dimostrazioni basate su figure e diagrammi con altre ottenute soltanto con il calcolo simbolico.

Per l'epoca era un bel passo avanti, perché spostava l'attenzione dall'approssimazione grafica all'esattezza analitica. In seguito i matematici avrebbero cercato di fare marcia indietro e ritornare all'immediatezza dell'intuizione visiva; ma allora la formalizzazione algebrica era considerata il pane del pensiero logico, naturale compagna della piú esplicita costruzione grafica. Le mode, anche in matematica, fanno spesso un giro completo e ritornano al punto di partenza, anche se sovente a un livello piú alto, come su una scala a chiocciola.

Il ruolo fondamentale di Hamilton in materia fu quello dell'unificatore: prese una grande varietà di fatti noti e li ridusse a conseguenze di una teoria di fondo. Di ogni sistema ottico si definiva la cosiddetta *funzione caratteristica*, in grado di descriverlo in modo compatto; ogni configurazione di lenti e sorgenti luminose si poteva dunque sintetizzare in un'unica equazione, che tra l'altro si poteva risolvere con una tecnica standard, giungendo infine alla descrizione completa del sistema e del suo comportamento. La teoria si basava su un solo principio fondamentale: i raggi luminosi, all'interno di qualsivoglia gruppo di lenti, prismi e specchi, seguono sempre il percorso che li porta a destinazione nel minor tempo possibile.

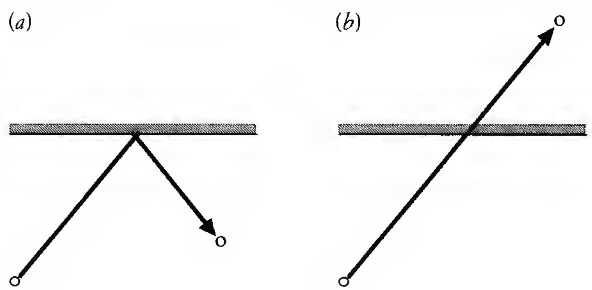
Fermat aveva già scoperto qualche caso particolare di questo fenomeno, tanto che oggi è spesso chiamato «principio di Fermat». L'esempio piú semplice con cui illustrarlo è dato dalla riflessione di un raggio di luce che incide su uno specchio piano, come si vede nella figura 9.1*a*. La legge della riflessione, una delle piú grandi scoperte della fisica rinascimentale, ci dice che i due raggi, quello che arriva e quello che riparte, formano con la superficie dello specchio due angoli uguali.

Fermat aveva avuto un'idea geniale: prendiamo il secondo raggio, quello in uscita, e ribaltiamolo rispetto al piano dello specchio, ottenendo la configurazione della figura 9.1*b*. Grazie alla geometria euclidea, la condizione sugli angoli uguali che abbiamo appena enunciato equivale a dire che il ribaltamento dà vita a un segmento rettilineo che congiunge il punto di partenza con quello di arrivo. Ma, sempre grazie a Euclide, sappiamo che un percorso lungo una retta è il piú breve fra tutti quelli che uniscono due punti. Poiché la velocità della luce nell'aria è costante, il percorso piú breve è anche quello piú rapido. Torniamo alla figura di sinistra e, visto che non abbiamo alterato le lunghezze, possiamo affermare che lo stesso principio vale anche qui: il percorso seguito dai raggi è quello piú breve e veloce. Riassumendo, la proprietà degli angoli uguali è matematicamente equivalente a quella del minimo, cioè al fatto che la luce deve per forza seguire il cammino che la porta nel piú breve tempo possibile dal punto di partenza a quello di arrivo, passando per la superficie dello specchio.

Per la rifrazione vale una legge analoga, detta legge di Snell, che stabilisce in che modo i raggi deflettano dalla retta via passando da un mezzo a un altro, ad esempio dall'aria al vetro o all'acqua. Anche questa si può derivare dal principio di minimo, tenendo presente che la velocità della luce è diversa nell'aria e negli altri mezzi, dove viaggia piú lentamente. Hamilton non si fermò a questi due casi, ma affermò che il principio valeva universalmente per tutti i sistemi ottici, fatto che poteva essere riassunto con l'esistenza di un oggetto matematico come la funzione caratteristica.

La parte teorica era notevole, ma nelle capaci mani di Hamilton si tramutò subito in una serie di previsioni sperimentali. Una conseguen-

Figura 9.1.
La legge della riflessione è conseguenza del principio di minimo.



za dei suoi ragionamenti era l'esistenza di un'ipotetica «rifrazione conica», grazie alla quale un raggio di luce fatto passare attraverso un apposito prisma ne sarebbe uscito sotto forma di fascio conico. Nel 1832 questa previsione, da tutti accolta con grande meraviglia, fu verificata in modo definitivo da Humphry Lloyd con un cristallo di aragonite. La fama di Hamilton si sparse rapidamente nel mondo scientifico.

Nel frattempo, attorno al 1830 William stava pensando alla vita privata. In una lettera a Wordsworth scrisse che voleva sposare una certa Ellen de Vere, di cui ammirava «l'ingegno». Anche in questo caso si mise a scrivere poesie. Stava per porle la fatidica domanda quando la ragazza gli mandò a dire che per vari motivi non avrebbe mai potuto lasciare il paese natale, Curragh. Hamilton lo prese come un rifiuto ben dissimulato e a ragione, perché nel giro di un anno Ellen sposò un altro uomo e abbandonò il paesello.

Alla fine riuscí a impalmare Helen Bayly, una bellezza locale che viveva vicino all'osservatorio e che, nelle parole del marito, «non era proprio una mente brillante». La luna di miele fu disastrosa: Hamilton non faceva che lavorare alla sua teoria ottica, mentre la sposina era a letto malata. Nel 1834 nacque un figlio, William Edwin, ma subito dopo Helen si allontanò da casa per quasi un anno. Tornò, diede alla luce un altro maschio, Archibald Henry, nel 1835 e da lí in poi il matrimonio iniziò a precipitare.

La fama di Hamilton è legata soprattutto all'analogia ottico-meccanica, che i posteri riconobbero come la sua piú alta realizzazione. Ma nella sua testa, con una crescente ossessione che l'avrebbe accompagnato fino al letto di morte, la piú grande scoperta della sua carriera era rappresentata da un oggetto assai diverso: i quaternioni.

I quaternioni sono una struttura algebrica strettamente imparentata con i numeri complessi. Per Hamilton, essi celavano la chiave dei piú profondi misteri della fisica, anzi di tutto lo scibile umano, come si era convinto negli ultimi anni di vita. I fatti storici sembrarono non dargli ragione: negli anni successivi alla sua morte i quaternioni scivolarono lentamente nell'oblio, diventando un argomento molto secondario e privo di serie applicazioni, situato nelle regioni piú remote dell'algebra.

Ma negli ultimi tempi questi oggetti hanno conosciuto un ritorno di popolarità. Anche se forse non si riveleranno la chiave di tutto, come sperava il loro scopritore, sono oggi riconosciuti come una struttura molto significativa, che sta alla base di un crescente numero di fenomeni. Sembra proprio che i quaternioni siano creature assai speciali, dotati delle bizzarre proprietà richieste dalle piú moderne teorie fisiche.

All'epoca della loro nascita questi oggetti erano davvero rivoluzionari, perché violavano una delle piú importanti regole dell'algebra, tacitamente date per scontate. Ma fu solo l'inizio: nei venti anni successivi ne vennero infrante molte altre, a volte con il risultato di approdare su nuovi fertili terreni matematici, altre volte impelagandosi sterilmente in un vicolo cieco. Le regole considerate inviolabili a metà Ottocento si rivelavano, una dopo l'altra, semplici convenzioni che rendevano forse la vita piú semplice, ma che non sempre erano adeguate a soddisfare certe esigenze profonde della matematica.

Nel nuovo mondo che Galois aveva lasciato in eredità, l'algebra non era piú solo la manipolazione di simboli al posto di numeri nelle equazioni, ma era lo studio delle strutture sottostanti: processi di calcolo, trasformazioni, simmetrie. Questo radicale mutamento di prospettiva cambiò il volto della matematica, rendendola piú astratta, ma anche piú onnicomprensiva e potente – nonché ricca di una strana, indefinibile bellezza.

Prima che i matematici italiani del Rinascimento cominciassero a chiedersi il senso di un oggetto come la radice quadrata di –1, i numeri utilizzati dall'umanità appartenevano tutti a uno stesso sistema, che ancora oggi per motivi storici, a rischio di confusioni circa i legami della matematica con il mondo, si definisce classe dei *numeri reali.* È davvero un nome inopportuno, perché sembra voler dire che questi numeri appartengano in qualche modo alla trama della realtà e non che siano frutto degli sforzi di comprensione della mente umana. In effetti non sono piú «reali» di tutti gli altri sistemi numerici inventati negli ultimi centocinquant'anni. È vero, tuttavia, che rispetto a questi ultimi hanno un rapporto piú diretto con la «realtà», perché corrispondono a una versione astratta dell'idea di misurazione.

I numeri reali, in soldoni, sono i numeri decimali, non tanto per via della particolare notazione in cui sono espressi, che è solo un'utile convenzione per semplificare i calcoli, quanto per certe specifiche e generali proprietà di questa classe numerica. I loro antenati erano creature piú semplici e meno ambiziose. I primi esemplari che l'umanità piú o meno riconobbe come tali erano quelli che oggi chiamiamo *numeri naturali*: 0, 1, 2, 3, 4 ecc. Ho scritto «piú o meno» perché i primi passi in questo settore furono assai incerti. Per un certo periodo i Greci si rifiutarono di considerare il 2 un vero numero, perché era troppo piccolo per rappresentare la «numerosità». Alla fine cedettero, ma di fronte all'1 non vollero sentire ragioni. Se un contadino affermava di possedere «un numero di vacche» ma in realtà ne aveva una sola, era colpevole di esagerazione. «Numero» significava «pluralità», dunque non c'era posto per il singolare.

Ma con lo sviluppo dei sistemi di notazione divenne ovvio a tutti che 1 era necessario per fare i conti come e piú dei suoi fratelli maggiori. Era il piú piccolo, ma al tempo stesso il piú importante di tutti, perché tutto partiva da e con lui. Sommando tanti 1 si potevano ottenere tutti gli altri numeri, fatto che le prime notazioni riflettevano in modo letterale, ad esempio rappresentando il numero 7 con una fila di unità: | | | | | | |.

Molto tempo dopo gli Indiani si accorsero che un numero ancora piú importante precedeva l'1, che dunque non era il vero punto di partenza: lo 0 era il vero primo numero. Dopo un altro, lungo intervallo di tempo si scoprí che era utile far entrare nella mischia anche i numeri negativi, quelli *minori del nulla.* Il sistema che ne risultò oggi è detto dei *numeri interi*: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... Ma non era certo finita qui.

Il problema con gli interi è che non sono molto utili per rappresentare le misure. Prendiamo un contadino che voglia parlare di una quantità di grano compresa tra 1 e 2 sacchi: come fa senza frazioni? Non può, deve per forza usare espressioni come «un sacco e mezzo», «un sacco e un terzo» ecc. Dunque si dovettero prendere in considerazione anche numeri come 1/2, 1/3 ecc., che furono annotati in vari modi nel corso della storia. Come abbiamo visto nel capitolo sui Babilonesi, con le frazioni piú complicate si riuscivano ad approssimare tutte le quantità desiderate. Pareva proprio che con questo sistema l'umanità fosse in grado di misurare tutto quanto.

Ed ecco che arrivano Pitagora e il suo teorema, che porta come conseguenza il fatto che la diagonale di un quadrato di lato 1 è data da un numero il cui quadrato è esattamente uguale a 2, cioè come diciamo oggi è la radice quadrata di 2. Un tal numero deve per forza esistere, perché la corrispondente diagonale si può facilmente tracciare, e ogni segmento deve essere misurabile, no? Ma come Ippaso scoprí a sue spese, qualunque sia la radice di 2 il suo valore non può essere scritto sotto forma di frazione: oggi lo diciamo un numero *irrazionale*. Si scoprí dunque che nel sistema dei razionali, cioè delle frazioni, c'erano dei buchi invisibili che andavano colmati.

Alla fine, però, sembrava non ci fossero piú lacune. I Greci avevano abbandonato i numeri a favore degli enti geometrici, ma poi le cose erano progredite. Nel 1585 un ingegnere e matematico di Bruges di nome Simon Stevin, piú noto come Stevino, fu nominato da Guglielmo il Taciturno precettore di suo figlio, Maurizio di Nassau. Da lí avrebbe poi fatto carriera, fino a diventare ispettore delle dighe, capo del genio militare e ministro delle Finanze. In queste posizioni di grande responsabilità, soprattutto nelle ultime due, si era trovato di fronte alla necessità di registrare i conti in modo ordinato e si era rivolto ai testi classici italiani in materia. Cercava però un modo nuovo per rappresentare i valori frazionari, che unisse la flessibilità del sistema posizionale indoarabo con la precisione di quello sessagesimale babilonese. Alla fine inventò un analogo in base dieci di quest'ultimo: i numeri decimali.

In un saggio che diede alle stampe per divulgare la sua nuova notazione, Stevino fu sufficientemente accorto da inserire dei veri e propri slogan pubblicitari. Scrisse ad esempio che il suo metodo era stato «provato e riprovato da contabili di vaglia, che l'hanno trovato cosí utile da abbandonare di loro spontanea volontà le loro personali notazioni e abbreviazioni, per abbracciare quelle nuove», e che il sistema decimale insegnava «a svolgere tutti i calcoli che si incontrano nella pratica come se si trattasse sempre di numeri interi, senza l'aiuto delle frazioni».

La notazione di Stevino non faceva esplicito uso della virgola, ma in pratica era equivalente alla nostra. Ad esempio, al posto di 3,1416 scriveva 3⓪ 1① 4② 1③ 6④. Il simbolo⓪ stava a indicare un numero intero, ① un decimo, ② un centesimo e cosí via. Il sistema si diffuse e i contabili presero a tralasciare gli indicatori ①, ② ecc., lasciando solo lo ⓪ che si semplificò fino a diventare un punto o una virgola, a seconda dei Paesi.

Abbiamo visto che non è possibile scrivere il valore esatto di $\sqrt{2}$ con un numero decimale, perlomeno se vogliamo fermarci. Ma lo stesso si può dire anche di frazioni come 1/3, che vale 0,3333... Possiamo però affermare che ne esiste una rappresentazione «esatta», dando un senso nuovo all'aggettivo, se ammettiamo l'esistenza di una successione infinita di 3. Ma allora, in linea di principio, anche di $\sqrt{2}$ esiste una rappresentazione decimale «esatta»: è priva di una struttura evidente, come nel caso di 1/3, ma ha comunque la proprietà di approssimarsi sempre di piú al valore preciso man mano che si aggiungono cifre decimali. In teoria, l'insieme infinito di *tutte* queste cifre è un numero il cui quadrato è esattamente 2.

Accettando in via teorica questi «decimali infiniti», possiamo dire che il sistema dei numeri reali è completo ed è in grado di rappresentare ogni valore, in finanza come in matematica, con la precisione richiesta. Ogni possibile quantità misurabile ha come valore un numero reale. Nel caso ci sia la necessità di usare valori negativi, il sistema li tratta con facilità allo stesso modo. Sembra proprio che non ci sia piú alcuna lacuna da riempire, nessun nuovo sistema numerico da inventare.

E invece no.

La strana formula di Cardano per le equazioni cubiche sembrava voler dire qualcosa ai matematici, e questo qualcosa non era né chiaro né semplice. Partendo da un polinomio di terzo grado apparentemente innocuo, di cui era nota una radice, ci si ritrovava non con un semplice valore, ma con un pasticcio di radici di espressioni ancora piú pasticciate, che sembravano richiedere l'impossibile: estrarre la radice quadrata di un numero negativo. I pitagorici erano entrati in crisi di fronte alla radice di 2, ma quella di –1 era decisamente piú misteriosa.

Per secoli, la possibilità di dare un senso alle radici dei numeri negativi è sporadicamente venuta alla luce nel discorso matematico. All'inizio nessuno aveva la piú vaga idea sul da farsi, ma pian piano ci si accorse che ammettere la loro esistenza avrebbe portato a risultati assai utili.

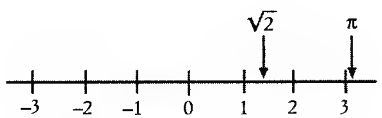
In un primo tempo tali quantità, denominate *immaginarie*, avevano come unico scopo quello di segnalare l'impossibilità della soluzione. Se si arrivava a un punto in cui era necessario estrarre la radice quadrata di un numero negativo, il segnale era chiaro: la soluzione era immaginaria, cioè inesistente. Anche un pensatore acuto come Cartesio era dello stesso avviso. In un suo scritto del 1637 parlava di radici «reali» e «immaginarie»; queste ultime avevano come unico scopo, appunto, di segnalare l'assenza di soluzioni reali. Newton affermò la stessa cosa. Ma nessuno di questi grandi sembrava aver letto Bombelli (vedi il cap. IV), che molto tempo prima si era accorto che a volte i valori immaginari potevano segnalare la *presenza*, non l'assenza di una soluzione. C'era comunque ancora molta confusione in materia.

Nel 1673 l'inglese John Wallis (che per inciso era nato a Ashford, nel Kent, a circa 25 chilometri dal mio paese natale) ebbe un'idea geniale: trovò un modo intuitivo per rappresentare i numeri immaginari, anche quelli cosiddetti *complessi*, cioè dotati sia di una parte reale sia di una parte immaginaria. Il segreto sta nel pensarli come punti di un piano. Prima si deve partire dal concetto familiare di *retta reale* (vedi figura 9.2), cioè una retta, dunque estesa all'infinito in entrambe le direzioni, su cui, data un'unità di misura, si possono segnare tutti i numeri reali. Lo 0 sta nel mezzo, i negativi a sinistra e i positivi a destra.

Dato un numero reale qualunque, è possibile trovargli un posto univoco sulla retta reale, con la precisione richiesta, suddividendo l'unità in frazioni decimali sempre piú piccole (decimi, centesimi, millesimi ecc.). Un valore come $\sqrt{2}$ si trova tra 1 e 2, un po' piú a sinistra di 1,5. Il π invece sta subito a destra di 3, e cosí via.

E dove mettiamo $i = \sqrt{-1}$? Non certo sulla retta reale, dove non c'è posto per lui. Tanto per iniziare, non sapremmo se considerarlo positivo o negativo e quindi non avremmo idea di dove piazzarlo, se a destra o a sinistra dello 0.

Figura 9.2.
La retta reale.



Dunque Wallis gli trovò un altro posto, facendo entrare in scena una seconda retta ortogonale alla prima, su cui segnare tutti gli immaginari multipli di i (figura 9.3*a*). Con un termine oggi di moda, potremmo dire che si trattò di un vero e proprio «pensiero laterale».

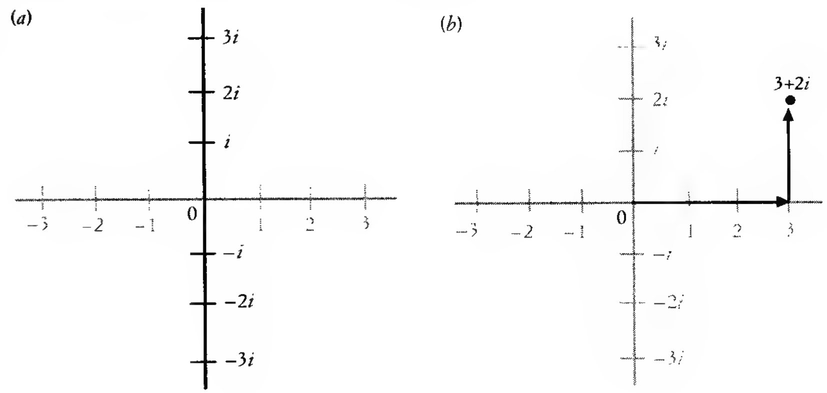
Le due rette devono intersecarsi in corrispondenza di 0, perché è facile dimostrare che, se vogliamo dare un senso ai nostri numeri, $i \times 0 = 0$. Dunque le due origini devono coincidere.

Un numero complesso è formato da una parte reale e da una immaginaria. Per segnarlo sul piano di Wallis, basta localizzare la prima sulla retta orizzontale, e poi spostarsi ad angolo retto, parallelamente alla retta verticale, in corrispondenza della parte immaginaria; nella figura 9.3*b* è segnato ad esempio il numero $3 + 2i$.

Questa idea del matematico inglese risolveva completamente il problema di dare un senso ai numeri immaginari, in modo elegante e definitivo. Un vero colpo di genio.

Che fu ignorato da tutti.

Figura 9.3.
(*a*) Due copie della retta reale poste l'una perpendicolare all'altra. (*b*) Il piano complesso secondo Wallis.



Nonostante non fosse stata riconosciuta pubblicamente, l'intuizione di Wallis dovette in qualche modo percolare dentro la coscienza collettiva della matematica, perché a partire da quegli anni si iniziarono a utilizzare piú o meno consciamente i piani per rappresentare i numeri complessi.

Con il progredire delle tecniche, i calcoli si facevano sempre piú complicati. Nel 1702 Johann Bernoulli, mentre affrontava un problema di analisi, si trovò a dover calcolare il logaritmo di un numero complesso. Dieci anni piú tardi, si era impelagato in una disputa con Leibniz riguardo ai logaritmi dei numeri negativi. La soluzione di questo secondo problema avrebbe portato automaticamente a quella del primo, perché il logaritmo della radice quadrata di un numero è uguale alla metà del logaritmo del numero stesso, dunque $\log i = 1/2 \log(-1)$. Ma qual era il logaritmo di -1?

Per Leibniz si doveva trattare di un valore complesso, per Bernoulli invece di un numero reale. Il secondo produsse un semplice calcolo a sostegno della sua tesi, che per l'altro non aveva senso, né come metodo né come risultato. Nel 1749 Eulero risolse la controversia nettamente a favore di Leibniz, scoprendo che Bernoulli si era dimenticato qualcosa. Il suo era uno di quei calcoli che richiedono l'aggiunta alla fine di una costante «arbitraria», e per troppo entusiasmo egli aveva assunto tacitamente che fosse uguale a zero. Invece no, era un numero immaginario, il che spiegava la discrepanza tra i due risultati.

La «complessificazione» della matematica procedeva a ritmo spedito, con l'estensione al campo complesso di molti concetti nati all'interno del campo reale. Nel 1797 il norvegese Caspar Wessel pubblicò un articolo in cui mostrava un metodo per rappresentare i numeri complessi come punti del piano. Wessel era il sesto dei quattordici figli di un pastore protestante, nato in un'epoca in cui in Norvegia non esistevano università; essendo però il Paese unito alla Danimarca, il giovane poté studiare all'Università di Copenaghen, dove si recò con il fratello Ole, iscritto a legge. I due dovevano lavorare per integrare le non floride finanze famigliari e si misero a fare i topografi.

Forse durante una rilevazione topografica, a Caspar venne in mente che la geometria del piano (soprattutto le rette e la loro inclinazione) poteva rappresentarsi in modo algebrico grazie ai numeri complessi. Viceversa, dato un numero complesso lo si poteva interpretare come punto su un piano. Raccolse le sue idee in un articolo, l'unico che avrebbe mai pubblicato, e lo sottopose nel 1797 all'Accademia Reale danese.

Purtroppo nessun matematico europeo di fama conosceva il danese e il lavoro passò inosservato per un secolo, fino a quando non fu tradotto in francese. Nel frattempo Jean-Robert Argand aveva avuto, in modo indipendente, la stessa idea e aveva pubblicato una memoria a riguardo nel 1806. Cinque anni piú tardi Gauss, anche lui ignaro dei risultati altrui, ebbe la stessa pensata. Nel corso degli anni i termini «diagramma di Argand», «piano di Gauss» e poi anche «piano di Wessel» cominciarono a circolare, diffondendosi in modo diverso da Paese a Paese a seconda del rispettivo orgoglio nazionale.

Hamilton fece il passo finale in questa direzione. Nel 1837, quasi tre secoli dopo i timidi tentativi di Cardano di prendere in considerazione i valori immaginari, il matematico irlandese rimosse ogni giustificazione geometrica e rese i numeri complessi un sistema numerico dotato di una sua algebra. L'idea era semplice ed era implicita già nella proposta di Wallis (e di Wessel, Argand e Gauss). Nessuno, però, l'aveva mai esplicitata.

Un punto nel piano si può identificare con una coppia di numeri reali, che sono le sue coordinate, segnate con (x, y). Osservando il piano di Wallis (o se preferite di Wessel-Argand-Gauss), è ovvio che x corrisponde alla parte reale e y alla parte immaginaria di un numero complesso. Dunque il numero $x + iy$ si identifica con la coppia di numeri reali (x, y). Con qualche facile calcolo si possono ricavare le regole per l'addizione e moltiplicazione delle coppie; il punto centrale è questo: poiché i corrisponde a $(0,1)$ e -1 a $(-1,0)$, deve valere $(0,1) \times (0,1) = (-1,0)$. Alla lettura delle formule di Hamilton, Gauss reagí scrivendo una lettera a Wolfgang Bolyai, in cui sosteneva di aver avuto la stessa idea nel 1831, senza però pubblicare niente. La volpe aveva cancellato un'altra volta le tracce con la coda, stavolta senza lasciare nulla di visibile.

Dunque, problema risolto. Un numero complesso non era che una coppia di numeri reali, su cui si poteva operare seguendo poche, semplici regole. Poiché due numeri reali erano decisamente «veri», i complessi avevano la stessa loro legittimità, e il termine «immaginario» era decisamente fuorviante.

Oggi la si vede in maniera diametralmente opposta: è «reale» a essere fuorviante, perché tutti i numeri, reali e immaginari, non sono che prodotti della nostra immaginazione.

Le reazioni di fronte all'impresa di Hamilton, che aveva risolto un dilemma vecchio di tre secoli, furono decisamente modeste. Una volta che il concetto di numero complesso era stato incorporato nella trama della matematica, i timori sul suo status ontologico erano divenuti poco importanti. Comunque, la sua identificazione con le coppie di numeri reali rappresentava davvero un progresso significativo. Forse i numeri immaginari non eccitavano piú l'immaginazione come un tempo, ma l'idea di costruire un nuovo sistema numerico a partire da uno esistente entrò in profondità nelle coscienze dei matematici.

Si scoprí presto che i numeri complessi non erano utili solo in algebra e analisi, ma fornivano metodi fondamentali per la risoluzione di problemi in ambito fisico, che si trattasse di fluidi, conduzione del calore, gravità, onde sonore e molti altri fenomeni. C'era però un grosso limite: si potevano applicare solo in due dimensioni e non nello spazio tridimensionale in cui siamo immersi. Certi problemi, come ad esempio determinare le equazioni di moto della membrana di un tamburo o del flusso di uno strato sottile di fluido, si riuscivano a restringere senza difficoltà a due dimensioni. Ma in generale c'era una crescente irritazione per la mancata applicazione dei metodi dell'analisi complessa allo spazio.

Forse si poteva estendere il sistema dei numeri reali alle tre dimensioni. La formalizzazione di Hamilton aveva identificato i numeri complessi con le coppie (x, y); sembrava naturale, allora, provare ad applicare lo stesso metodo alle triplette reali (x, y, z), di cui però non si conosceva una possibile algebra. Hamilton decise di affrontare l'argomento di petto.

L'addizione era semplice, una banale estensione dell'addizione tra i complessi, fatta componente per componente: obbediva a tutte le regole sensate e c'era un unico modo naturale per farla. Oggi chiamiamo questa operazione una «somma vettoriale».

Il vero problema era dato dalla moltiplicazione. Già per le coppie di numeri, cioè per i complessi, si era visto che non era possibile fare

un prodotto componente per componente, perché questa operazione, pur conservando alcune proprietà desiderabili, portava a due conseguenze catastrofiche.

La prima era la perdita di collegamento con i numeri immaginari, cioè la non esistenza della radice quadrata di -1.

La seconda era che il prodotto di due numeri diversi da 0 poteva dare 0. Cioè esistevano i cosiddetti «divisori dello zero», che sono in grado di creare scompiglio in molti metodi algebrici consueti, tra cui quelli che servono a risolvere le equazioni.

In due dimensioni, cioè nel caso dei numeri complessi, queste difficoltà si superano definendo la moltiplicazione in modo particolare, come fece Hamilton. Ma quando si mise a provare metodi simili in tre dimensioni, si accorse con stupore che non riusciva a uscirne: qualsiasi definizione adottasse, aveva sempre qualche grave difetto. Se voleva conservare la radice di -1 doveva rassegnarsi ai divisori di zero, di cui sembrava non ci fosse modo di liberarsi.

Se la situazione vi sembra molto simile a quella che si era creata a proposito delle equazioni di quinto grado, siete sulla pista giusta. Quando molti ingegni raffinati non riescono a risolvere un problema, forse questo accade perché il problema stesso non ammette soluzione. Se la storia della matematica ci ha insegnato qualcosa, è senz'altro il fatto che esistono molte cose impossibili: scrivere la radice quadrata di 2 sotto forma di frazione, dividere in tre parti uguali un angolo con riga e compasso, risolvere un'equazione di quinto grado tramite radicali, e cosí via. La matematica ha i suoi terreni proibiti, e forse uno di questi è proprio la costruzione di un'algebra in tre dimensioni dotata di tutte le proprietà desiderabili.

Oggi, se volessimo scoprire seriamente come stanno le cose, metteremmo in piedi un programma di ricerca. Innanzitutto dovremmo scrivere in modo esplicito le proprietà da noi richieste; poi studiare le loro conseguenze; infine determinare certe caratteristiche della nostra ipotetica algebra, cercando di capire se sono compatibili tra di loro, o se per qualche motivo non si possono concretizzare in una sola struttura.

Questo è il modo contemporaneo di affrontare i problemi. Hamilton non si mise a caccia in modo cosí sistematico. Dava per scontato che l'algebra cercata dovesse avere tutte le proprietà «giuste», ma un giorno si rese conto che per far funzionare il sistema avrebbe dovuto rinunciare a una di loro. E soprattutto capí che in tre dimensioni non si riusciva a combinare proprio nulla, ma che bisognava fare un passo in piú, arrivando a quattro.

Torniamo per un attimo a queste sfuggenti proprietà «naturali». I calcoli algebrici sono possibili grazie a una serie di regole per riposizionare i simboli; ricordiamo infatti, dal terzo capitolo, che il nome stesso dell'algebra deriva dalla parola araba *al-jabr*, che si può tradurre come «ristabilire», cioè quell'azione che oggi diremmo «spostare un termine dall'altra parte dell'uguale, cambiando segno». È da solo centocinquant'anni che i matematici si sono presi la briga di descrivere in modo esplicito le regole che permettono questo e altri spostamenti, da cui ne hanno derivate logicamente altre, anch'esse ben note. In questo modo è stato possibile stabilire un metodo assiomatico per l'algebra analogo a quello euclideo per la geometria. Ci sono voluti solo un paio di millenni.

Per fissare le idee, mi limiterò a tre regole relative alla moltiplicazione (l'addizione è simile ma piú semplice; è con i prodotti che le cose diventano interessanti). I bambini costretti a imparare a memoria le tabelline si accorgono prima o poi che possono dimezzare gli sforzi: tre per quattro fa dodici, ma anche quattro per tre! Questa è la proprietà *commutativa*, per cui l'ordine dei termini di un prodotto non ne cambia il risultato; in simboli $ab = ba$. Esaminando la formula di Hamilton per la moltiplicazione dei numeri complessi, si può verificare che anche nel nuovo sistema numerico la proprietà commutativa continua a essere valida.

Un po' meno evidente è la proprietà *associativa*, che ci dice in pratica questo: per moltiplicare tre numeri fra loro, si può iniziare sia da destra sia da sinistra. Ad esempio, per calcolare $2 \times 3 \times 5$ posso partire da $2 \times 3 = 6$ e moltiplicare questo risultato per 5, oppure iniziare dal fondo con $3 \times 5 = 15$ e moltiplicarlo poi per 2. In ogni modo, ottengo sempre 30. La proprietà associativa può essere sintetizzata simbolicamente così: $(ab)c = a(bc)$, dove le parentesi ci indicano l'ordine in cui effettuare i calcoli. Anche questa caratteristica si conserva nel passaggio dai numeri reali a quelli complessi, grazie alle formule di Hamilton.

Infine c'è una proprietà molto utile che voglio battezzare per ana-

logia «divisiva», anche se nei testi di matematica la troverete descritta come *esistenza dell'inverso*. Grazie a lei, possiamo dividere qualsiasi numero per qualsiasi altro, purché diverso da zero. Ci sono ottime ragioni per proibire la divisione per zero, e la principale è perché, fondamentalmente, è un'operazione priva di senso.

Abbiamo detto poco sopra che l'algebra a tre dimensioni in cui la moltiplicazione è quella «ovvia», componente per componente, dà dei problemi. Ora possiamo essere piú specifici: rispetta le proprietà commutativa e associativa, ma non quella divisiva.

Il colpo di genio di Hamilton, arrivato dopo innumerevoli tentativi frustrati e ore e ore di calcoli, rovesciava la prospettiva: per arrivare a un nuovo sistema numerico in cui le proprietà associativa e divisiva rimanevano valide era necessario fare un sacrificio, buttando a mare proprio la commutatività. In piú, si era costretti a prendere quadruple di numeri reali, non triplette. In tre dimensioni le cose non funzionano bene, mentre in quattro sí: esiste un'algebra idonea, ed è l'unica possibile, a patto di rinunciare alla «perfezione» e non richiedere la proprietà commutativa.

Ma è una proprietà cosí fondamentale? La necessità di questa rinuncia era un grosso blocco mentale, che non permetteva a Hamilton di fare grandi progressi. Tutto cambiò in un istante, nell'attimo in cui con un colpo d'intuito capí quale tecnica doveva usare per la moltiplicazione delle quadruple. Era il 16 ottobre 1843 e stava passeggiando con la moglie lungo il Royal Canal a Dublino, diretto a una riunione della prestigiosa Royal Irish Academy. Il suo subconscio doveva essere ancora impegnato in calcoli e riflessioni, perché tutto d'un tratto gli venne un'ispirazione. «In quel preciso istante sentii come lo scatto di un circuito elettrico della mente, – scrisse poi in una lettera, – e scoccò una scintilla che conteneva le relazioni fondamentali tra i, j, e k perfettamente formate, che da allora ho continuato a usare».

L'eccitazione del momento fu tale che Hamilton si sentí in obbligo di incidere le formule sulla spalletta del ponte di Brougham (poi Broome). Il ponte è ancora in piedi, anche se al posto del graffito originale è stata posta una targa commemorativa, che contiene queste relazioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Formule molto eleganti e simmetriche, certo. Ma forse vi starete chiedendo che c'entrino con le quadruple.

Ricordiamoci che i numeri complessi si possono scrivere sia come coppie (x, y) sia nella forma $x + iy$, dove $i = \sqrt{-1}$. Allo stesso modo, i numeri che Hamilton aveva in testa si potevano rappresentare sia come quadruple (x, y, z, w) sia nella forma $x + iy + jz + kw$, dove i, j, e k hanno le proprietà scritte sopra.

I nuovi numeri furono battezzati dal loro creatore *quaternioni*. Hamilton ne scrisse le formule per la moltiplicazione e dimostrò che conservavano la proprietà associativa e divisiva (quest'ultima, in un secondo tempo, si sarebbe mostrata la piú importante). Non quella commutativa, però: le regole del prodotto tra quaternioni implicano ad esempio che $ij = k$ ma $ji = -k$.

All'interno dei quaternioni è contenuta una copia dei numeri complessi, quelli della forma $x + iy$. Si scopre anche che i e $-i$ non sono piú le sole radici quadrate di -1, ma che lo sono anche j, $-j$, k e $-k$, oltre a una serie *infinita* di altri valori.

Quindi, oltre alla proprietà commutativa, nei quaternioni dobbiamo anche abbandonare l'idea che un'equazione di secondo grado abbia solo due soluzioni. Ma i vantaggi di questi numeri sono molto piú importanti dei loro difetti. Bisogna solo abituarsi a usarli.

Nel 1845 Thomas Disney fece visita a Hamilton, portando con sé la figlia Catherine, vecchia fiamma di William, che nel frattempo era rimasta vedova e si era risposata. L'incontro sembrò riaprire vecchie ferite e come conseguenza il grande matematico si diede sempre piú all'alcol. Durante una cena tra colleghi a Dublino si comportò in modo cosí imbarazzante da promettere il giorno dopo che non avrebbe mai piú bevuto. Rispettò il voto per due anni. Cedette di fronte ai dileggi dell'astronomo George Airy, che lo prendeva in giro per la sua sobrietà. Da lí in poi si tramutò in un alcolista cronico.

La vita privata era piena di dolori. Prima morirono due suoi zii; poi un amico e un collega si suicidarono. A un certo punto Catherine prese a scrivergli, aggravando ancora la sua depressione. Resasi conto che la sua condotta non era appropriata per una rispettabile donna sposata, tentò senza troppa convinzione di uccidersi. Dopo di che si separò dal marito e andò a vivere con la madre.

Hamilton continuò a scriverle, facendole recapitare le lettere attraverso parenti vari. Nel 1853 il contatto tra i due si era ristabilito e la donna era riuscita a spedirgli un piccolo dono. Hamilton rispose andando a trovarla di persona, portando con sé una copia del suo trattato sui quaternioni. Due settimane dopo Catherine morí. William ne fu sconvolto ed entrò in una spirale di autodistruzione. Morí nel 1865 di gotta, malattia tipica dei forti bevitori. A casa sua furono ritrovati resti di cibo andato a male mischiati a fogli pieni di calcoli.

Per Hamilton i quaternioni erano il Sacro Graal dell'algebra, la vera generalizzazione dei numeri complessi alle dimensioni superiori e la chiave per comprendere la geometria e la fisica dello spazio tridimensionale. Certo i quaternioni avevano quattro dimensioni, non tre, ma bastava ridursi al sottoinsieme naturale «immaginario» dei numeri di forma $bi + cj + dk$. Dal punto di vista geometrico, i, j, e k si possono interpretare come rotazioni attorno a tre assi perpendicolari, con una piccola accortezza: in pratica si deve pensare a uno spazio in cui il cerchio ha 720 gradi, non 360. A parte questa stranezza, i quaternioni sembravano davvero possedere utili applicazioni.

La «parte reale» si comportava esattamente come un numero reale. Non era possibile eliminarla del tutto, perché saltava fuori nei calcoli, anche quando si iniziava con quaternioni puramente immaginari. D'altronde, se fosse stato possibile rimanere nell'ambito delle componenti i, j, e k si sarebbe potuta scrivere un'algebra sensata a tre parametri. Il compromesso del passaggio a un sistema a quattro dimensioni era il migliore possibile, e il fatto che il «naturale» spazio tridimensionale vi fosse contenuto senza problemi lo rendeva ugualmente utile.

Hamilton dedicò gli anni che gli restavano da vivere solo ai quaternioni, sviluppandone l'algebra e cercando di diffonderne le applicazioni alla fisica. Raccolse solo pochi devoti seguaci, che fondarono una sorta di scuola quaternionica; alla morte del fondatore le redini furono prese in mano da Peter Tait a Edinburgo e Benjamin Pierce a Harvard.

La maggioranza dei colleghi, però, non era entusiasta. I quaternioni non piacevano perché erano artificiali, ma soprattutto perché avevano un concorrente che molti ritenevano piú valido. A capo del dissenso, se cosí si può dire, c'erano il prussiano Hermann Grassmann e l'americano Josiah Willard Gibbs, creatori di quella che oggi si chiama teoria dei *vettori*. Era una novità che dava vita a varie algebre utili in molte dimensioni, senza il vincolo delle tre spaziali o delle quattro dei quaternioni. Le proprietà delle loro creature non erano eleganti come quelle hamiltoniane; ad esempio due vettori non si potevano dividere tra loro. Ma Grassmann e Gibbs preferivano lavorare con strutture generali che funzionavano bene, anche se mancavano di qualche proprietà caratteristica degli insiemi numerici. D'accordo, non si potevano piú fare le divisioni, ma che importava?

Hamilton porto con sé nella tomba la convinzione che i quaternioni fossero il suo piú alto contributo alla matematica e alla scienza. Eccetto forse Tait e Pierce, nessuno dei suoi successori era della stessa opinione. Il nuovo sistema numerico rimase a lungo un'obsoleta stranezza vittoriana, esempio di sterilità teorica, di matematica fine a stessa. Anche nei corsi universitari piú avanzati, i quaternioni non venivano insegnati, o al limite vi si accennava come pura curiosità. Come scrive il quasi-storico Eric Temple Bell («quasi» storico perché non era certo tipo da lasciare che i fatti accertati rovinassero quello che credeva un bel racconto):

> Facciamo notare che la cosa piú triste nella vita di Hamilton non fu il suo matrimonio né la sua passione per l'alcol, ma la sua ferma convinzione che i quaternioni fossero la chiave della matematica nell'universo fisico; la storia ha dimostrato il tragico errore di Hamilton quando dichiarava: «Affermo ancora una volta che l'importanza di questa scoperta per il diciannovesimo secolo è pari a quella delle flussioni [calcolo differenziale] per il diciassettesimo». Nessun matematico si è mai ingannato cosí grossolanamente[1].

Ah sí?

Forse i quaternioni non sono diventati ciò che Hamilton sperava, ma con il tempo la loro importanza è assai cresciuta. Oggi sono un concetto indispensabile in matematica e vedremo come lo sono anche in fisica, grazie a una loro generalizzazione. L'ossessione hamiltoniana ha aperto la strada a nuovi, importanti settori dell'algebra e della fisica matematica.

Il caro quasi-storico si sbagliava, lui sí, «grossolanamente».

Hamilton esagerava un po', a proposito delle applicazioni della sua creatura, a cui cercava di far compiere numeri da circo per cui non era portata. Ma la sua fede, oggi, inizia ad apparire abbastanza giustificata. I quaternioni hanno la strana abitudine di saltar fuori nei modi e nei tempi piú inaspettati. Uno dei motivi per questo fatto potrebbe essere la loro unicità. Si caratterizzano sulla base di poche, ragionevoli e semplici proprietà, cioè tutte le «leggi naturali dell'algebra» tranne una, e costituiscono l'unica struttura matematica a esserne dotata.

Forse è bene approfondire la questione.

L'unico sistema numerico familiare alla maggioranza del genere umano è quello reale. Prendete una manciata di numeri reali, sommateli, sottraeteli, moltiplicateli e divideteli tra loro, e come risultato avrete sempre un altro numero reale. Certo, bisogna stare attenti a non dividere per zero, ma a parte questa necessaria restrizione si possono compiere molte e lunghe operazioni aritmetiche rimanendo sempre all'interno del sistema.

I matematici definiscono una struttura del genere un *campo*. I reali non sono l'unico campo esistente, perché ad esempio lo sono anche i razionali e i complessi, ma sono gli unici ad avere altre due proprietà: l'ordine e la completezza.

Sono un campo *ordinato* perché i numeri reali si susseguono secondo un ordine lineare, lungo una retta, dai negativi ai positivi. Anche i numeri razionali sono un campo ordinato, ma al contrario dei reali non sono un campo *completo*. Dare la definizione precisa di questa proprietà richiede qualche nozione tecnica; qui basti sapere che grazie alla completezza possiamo dire senza ambiguità che esistono numeri decimali infiniti come $\sqrt{2}$ e π.

Si può dimostrare che i numeri reali sono il solo campo ordinato e completo possibile. Ecco perché sono cosí importanti in matematica: sono l'unico ambiente in cui ha sempre senso confrontare due numeri per sapere quale dei due è maggiore e in cui è possibile sviluppare con un minimo di senso il calcolo differenziale e integrale.

I numeri complessi estendono quelli reali grazie all'aggiunta della radice quadrata di -1. Ma il prezzo pagato per poter estrarre sempre le radici dei numeri negativi è la perdita dell'ordine: il campo dei complessi è completo ma non ordinato. I suoi elementi sono sparsi sul piano, non allineati per bene su una retta.

I numeri complessi sono anche l'unico campo di dimensione finita (due, per la precisione, come il piano) che contiene il campo dei reali – oltre ai reali stessi, ovviamente, che hanno dimensione uno. Ciò implica che anche i complessi, a modo loro, sono unici. Sono i soli a permetterci di compiere molte utili operazioni, il che li rende indispensabili.

I quaternioni nascono nel tentativo di estendere il campo dei complessi aumentando la dimensione ma facendola restare finita, e allo stesso tempo conservando il maggior numero di proprietà algebriche. Vorremmo che continuassero a valere le solite leggi dell'addizione e della sottrazione, quasi tutte quelle della moltiplicazione e la possibilità stessa della divisione per un numero diverso da zero. Il sacrificio da compiere, questa volta, è piú grave, tanto da causare tutte quelle difficoltà al nostro Hamilton. Dobbiamo abbandonare la commutatività della moltiplicazione, accettare la cosa come necessaria e andare avanti con i calcoli. Una volta abituati all'idea, ci si chiede perché tale proprietà dovrebbe sempre valere, e il fatto che i numeri complessi la conservino sembra quasi un mezzo miracolo.

Un sistema numerico che abbia le proprietà dei quaternioni si definisce un'*algebra di divisione*.

I reali e i complessi sono due altri esempi di algebra di divisione; osserviamo che non è necessario che non valga la proprietà commutativa: semplicemente, non è richiesta. Ovviamente un campo è sempre un'algebra di divisione, ma non viceversa, e il primo esempio a essere scoperto sono stati proprio i quaternioni. Nel 1898 Adolf Hurwitz ne dimostrò anche l'unicità: i quaternioni sono l'*unica* algebra di divisione a dimensione finita che contiene i numeri reali, oltre ai reali stessi e ai complessi.

Avrete notato una certa struttura delle varie estensioni. Le dimensioni dei reali, dei complessi e dei quaternioni sono, rispettivamente, 1, 2 e 4. Sembra proprio l'inizio di una successione di potenze di 2, che continua con 8, 16, 32 ecc.

Esistono forse altri sistemi numerici interessanti con queste dimensioni?

Sí e no. Ma vi chiedo un po' di pazienza prima di giustificare la risposta, perché la nostra storia della simmetria sta per entrare in una nuova fase: quella dei collegamenti con le equazioni differenziali, il modello piú utilizzato per la descrizione matematica del mondo fisico, nonché il linguaggio in cui è scritta gran parte delle sue leggi.

Anche in questo caso, le strutture profonde della teoria hanno a che fare in modo essenziale con le simmetrie, ma in modo inedito. Come vedremo nel prossimo capitolo, i gruppi relativi non sono piú finiti ma «continui». Nella seconda metà dell'Ottocento, la matematica stava per essere arricchita da uno dei piú importanti programmi di ricerca mai concepiti.

[1] Bell 1937, trad. it. p. 367.

Capitolo decimo
Il militare mancato e il topo da biblioteca

Marius Sophus Lie si dedicò alle scienze solo perché non poteva fare il soldato, a causa dei suoi problemi agli occhi. Il giovane, che si faceva chiamare Sophus, frequentò sino al 1865 l'Università di Cristiania; non aveva seguito molti corsi di matematica, materia per cui non aveva dimostrato particolare predisposizione, ma tra i pochi ce n'era uno sulla teoria di Galois, tenuto da Ludwig Sylow. Voleva tentare la carriera accademica e per un po' rimase indeciso tra varie scienze: botanica, zoologia o astronomia.

Gli archivi dei prestiti della biblioteca universitaria mostrano che Lie, con il passare degli anni, leggeva sempre piú libri di matematica. Nel 1867, nel bel mezzo della notte, ebbe una specie di visione. L'amico Ernst Motzfeldt fu svegliato dalle sue urla eccitate: «L'ho trovato, l'ho trovato, è cosí semplice!», gridava.

Cosa aveva trovato? Un nuovo modo di concepire la geometria.

Lie si era interessato ai lavori dei grandi specialisti in materia, come il francese Jean-Victor Poncelet e il tedesco Julius Plücker, da cui aveva ricavato l'idea che potevano esistere geometrie i cui elementi base non erano i soliti punti euclidei, ma altri oggetti come rette, piani, cerchi. Nel 1869 pubblicò a sue spese una memoria in cui delineava il contenuto della sua illuminazione notturna. Come Galois e Abel prima di lui, scoprí presto che le sue teorie erano troppo rivoluzionarie per la vecchia guardia e che le riviste piú accreditate erano restie a pubblicarle. Ma Motzfeldt lo spinse a non scoraggiarsi e a continuare le ricerche. Finalmente una prestigiosa pubblicazione di settore accettò di stampare un suo lavoro, che fu accolto con favore. In questo modo Lie riuscí a ottenere una borsa di studio che gli permise di viaggiare in Europa, per andare a trovare i principali matematici del suo tempo e discutere con loro delle sue idee. Si recò subito nei due templi della scienza tedesca, Berlino e Gottinga, dove incontrò gli algebristi Leopold Kronecker ed Ernst Kummer e l'analista Karl Weierstrass. Il metodo di lavoro di Kummer lo impressionò favorevolmente, quello di Weierstrass molto meno.

L'incontro piú significativo della sua carriera, però, fu quello con Felix Klein a Berlino, che guarda caso era stato studente di Plücker, uno degli idoli del giovane norvegese. Lie e Klein avevano un retroterra culturale analogo, ma gusti molto diversi in fatto di matematica. Il tedesco era di fatto un algebrista con spiccate attitudini alla geometria, che preferiva dedicarsi a problemi specifici, purché interessanti ed eleganti; Sophus invece era un analista che prediligeva i vasti campi delle teorie generali. Paradossalmente, fu proprio una delle sue intuizioni piú «generali» a fornire alla matematica una struttura specifica di grande importanza, che era e continua a essere straordinariamente interessante ed elegante, oltre che di fatto algebrica. Se non fosse stato per la sua spinta dal particolare all'universale, forse questa struttura non sarebbe mai stata scoperta. Se il vostro scopo è comprendere tutti i possibili oggetti matematici di un certo tipo, e se ci riuscite, necessariamente ne troverete qualcuno dotato di caratteristiche molto peculiari.

Nel 1870 i due si incontrarono di nuovo a Parigi, dove Camille Jordan convertí Lie alla causa della geometria. All'epoca si riteneva con crescente convinzione che la geometria e la teoria dei gruppi fossero due facce della stessa medaglia, ma ci volle un bel po' di tempo perché la connessione venisse esplicitata in modo esaustivo. Lie e Klein lavorarono insieme per un certo periodo proprio a questo scopo. Alla fine il tedesco riassunse il suo pensiero nel celebre «programma di Erlangen» del 1872, secondo il quale la geometria e la teoria dei gruppi erano di fatto la stessa cosa.

Con il senno di poi, e utilizzando la terminologia moderna, la cosa pare ovvia. Data una geometria, le si può associare il suo gruppo delle simmetrie; viceversa, la geometria associata a un gruppo è l'oggetto che possiede le simmetrie descritte dal gruppo stesso. In pratica, una particolare geometria è definita in base agli oggetti invarianti rispetto all'azione di un certo gruppo.

Facciamo un esempio. Le simmetrie dell'ordinaria geometria piana euclidea sono quelle trasformazioni che conservano le lunghezze e gli angoli e che mandano rette in rette e cerchi in cerchi: tutte insieme costituiscono il gruppo dei movimenti rigidi sul piano. Viceversa, ogni oggetto che non cambia dopo essere stato sottoposto a un movimento rigido sul piano fa parte della geometria euclidea. Le geometrie non euclidee si possono definire semplicemente cambiando i gruppi delle trasformazioni.

Perché allora prendersi la briga di trasformare la geometria in teoria dei gruppi, se le due sono la stessa cosa? Perché in questo modo abbiamo due punti di vista differenti sotto cui studiare due settori diversi della matematica. In certi casi è piú facile adottare l'approccio geometrico, in altri quello algebrico. Due visuali di un campo sono meglio di una sola.

Nel frattempo i rapporti tra Francia e Prussia si stavano rapidamente deteriorando. Napoleone III, di fronte a una crescente impopolarità in patria, pensò bene di risollevarsi con una bella guerra patriottica. Spedí un ultimatum al cancelliere Bismarck, che lo rifiutò in modo sprezzante con un celebre dispaccio. Il 19 luglio 1870 le due nazioni si dichiararono guerra. Klein, cittadino prussiano che quel giorno si trovava a Parigi, ritenne prudente tornare a casa.

Lie, che non aveva problemi di cittadinanza, decise di rimanere nella capitale francese, dove si trovava molto bene. Cambiò idea quando si accorse che la Prussia stava vincendo la guerra e che le sue armate erano già arrivate a Metz. Anche se apparteneva a una nazione neutrale, pensò che era meglio non farsi trovare in una possibile zona di combattimenti.

Decise di mettersi in moto a piedi, verso sud, diretto in Italia. Non fece molta strada: le autorità francesi lo fermarono a Fontainebleau, una quarantina di chilometri dalla capitale. Portava con sé un bel po' di carte piene di simboli incomprensibili, che per la polizia erano sicuramente un codice segreto; fu quindi arrestato con l'accusa di essere una spia dei Tedeschi. Ci volle l'intervento personale di uno dei massimi matematici francesi, Gaston Darboux, per convincere le autorità che quegli strani segni erano del tutto innocui. Nel frattempo i Prussiani avevano stretto d'assedio Parigi. Alla fine Lie fu liberato e riprese il suo viaggio verso l'Italia, questa volta coronato da successo. Da lí tornò in Norvegia, fermandosi lungo la strada a salutare Klein, che era arrivato sano e salvo a Berlino.

Lie ottenne il dottorato nel 1872. Il mondo accademico norvegese fu cosí colpito dalle sue ricerche che in quello stesso anno l'Università di Cristiania creò una cattedra appositamente per lui. Con Sylow, suo vecchio professore, iniziò anche a raccogliere i lavori di Abel in vista di un'edizione critica. Nel 1874 sposò Anna Birch, dalla quale ebbe tre figli.

Fino a quel momento Lie si era concentrato su un argomento particolare, che ora sembrava maturo per nuovi clamorosi sviluppi. In matematica ci sono vari tipi di equazioni, ma le due classi piú importanti sono quelle algebriche, del tipo affrontato con successo da Abel e Galois, e quelle *differenziali*, figlie della scoperta di Newton delle leggi che governano il mondo naturale. Sono equazioni legate in genere a quantità fisiche, di cui descrivono il cambiamento al passare del tempo, o piú esattamente *la velocità* con cui cambiano. Ad esempio, la piú celebre legge di moto newtoniana dice che l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza totale che agisce su di esso, dove l'accelerazione è la quantità che misura il tasso di cambiamento della velocità. La legge, dunque, non fornisce esplicitamente il valore della velocità di un certo corpo, ma ci dice solo il modo in cui questa cambia. Un'altra equazione differenziale introdotta da Newton è relativa al cambiamento di temperatura in un corpo che si raffredda: anche in questo caso, si fornisce una relazione relativa al tasso di cambiamento della quantità in gioco, che è proporzionale alla differenza fra la temperatura dell'oggetto e quella dell'ambiente esterno.

Quasi tutte le leggi fondamentali della fisica, come quelle che descrivono lo scorrere di un fluido, l'azione della gravità, il moto dei pianeti, la conduzione del calore, il moto delle onde, l'azione del magnetismo, la propagazione della luce e quella del suono, sono in realtà equazioni differenziali. Come Newton capí per primo, in generale è piú semplice comprendere il comportamento degli oggetti naturali se consideriamo il modo con cui certe quantità cambiano, piú che il valore preciso delle quantità stesse.

Eccoci dunque all'idea di Lie, che si chiese: esiste forse una teoria delle equazioni differenziali analoga a quella di Galois per le equazioni algebriche? C'è forse un modo per capire se una certa equazione è risolubile con un particolare metodo?

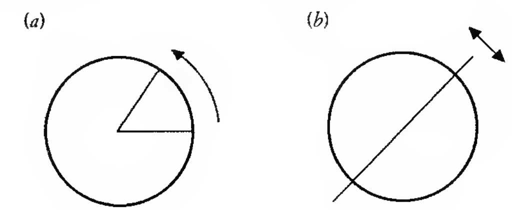
La chiave di tutto, ancora una volta, è la simmetria. Lie si rese conto che alcuni teoremi geometrici da lui ottenuti si potevano reinterpretare proprio in termini di equazioni differenziali. Nota una soluzione, era possibile applicarvi una trasformazione di un certo gruppo e dimostrare che il risultato era ancora una soluzione; da una se ne potevano ricavare molte, legate tra loro dall'azione del gruppo. In altre parole, il gruppo non era altro che l'insieme delle simmetrie di quella equazione differenziale.

Questa idea generale non poteva non condurre a scoperte di grande bellezza. Basti pensare cos'era saltato fuori quando Galois si era messo ad applicare la simmetria alle equazioni algebriche: chissà quale mondo meraviglioso sarebbe scaturito dalle assai piú importanti equazioni differenziali!

Galois aveva studiato solo i gruppi finiti, quelli che contengono un numero intero di trasformazioni, come il gruppo delle permutazioni delle radici di una quintica, che ha 120 elementi. Molti gruppi, però, sono infiniti, e tra loro ci sono anche quelli che descrivono le simmetrie delle equazioni differenziali.

L'esempio forse piú comune è dato dal gruppo delle simmetrie di un cerchio, che contiene tutte le rotazioni di un angolo qualsivoglia (figura 10.1*a*). Visto che gli angoli possibili sono infiniti, il gruppo in questione contiene infiniti elementi. Lo si indica di solito con il simbolo SO(2), che sta per «gruppo ortogonale speciale del piano»: ortogonale, perché contiene i moti rigidi del piano, e speciale, perché non contiene le riflessioni.

Figura 10.1.
(*a*) Il cerchio ha infinite simmetrie di rotazione e (*b*) di riflessione.



Anche gli assi di simmetria di un cerchio sono infiniti (figura 10.1*b*) e dunque infinito è anche il gruppo delle riflessioni attorno a un qualunque diametro. Se le aggiungiamo a SO(2), otteniamo un gruppo ortogonale piú grande, indicato con O(2).

SO(2) e O(2) sono sí infiniti, ma di un tipo molto addomesticabile. Ogni rotazione è completamente specificata da un solo numero, che indica l'angolo, e la loro composizione si calcola semplicemente addizionando i rispettivi angoli. Lie denotò questo tipo di comportamento come caratteristico dei gruppi *continui*. SO(2) è dunque un gruppo continuo unidimensionale, perché basta un solo parametro per determinare i suoi membri. Lo stesso si può dire di O(2), perché per distinguere una rotazione da una riflessione basta decidere, per convenzione, di usare i segni algebrici piú e meno.

SO(2) è il piú semplice tra i *gruppi di Lie*, oggetti dotati di due tipi di strutture: sono gruppi e al tempo stesso *varietà differenziabili*, cioè spazi multidimensionali connotati da particolari proprietà. La varietà di SO(2) è proprio il cerchio, e l'operazione di gruppo è la composizione di due punti sulla circonferenza effettuata tramite addizione dei rispettivi angoli.

Lie scoprí una caratteristica molto interessante dei suoi gruppi: si possono «linearizzare», cioè la loro varietà, in genere curva, si può rimpiazzare con uno spazio piatto, euclideo, tangente a quello originale. Nel caso di SO(2) le cose stanno come nella figura 10.2.

Quando la struttura di gruppo viene linearizzata in questo modo, fornisce allo spazio tangente in modo automatico un'altra struttura algebrica, che è una specie di versione «infinitesima» di quella di partenza, perché descrive il comportamento delle trasformazioni quando sono molto vicine all'identità. Questa è detta *algebra di Lie* del rispettivo gruppo; ha la stessa dimensione, ma possiede una geometria molto piú semplice, data la sua piattezza.

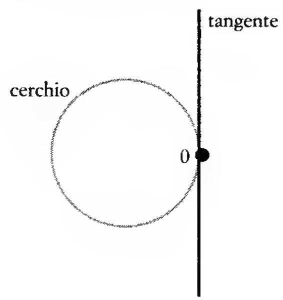
Naturalmente c'è un prezzo da pagare per la semplicità. L'algebra di Lie eredita quasi tutte le proprietà importanti del suo gruppo, ma perde qualche struttura piú delicata, oltre a dover sottostare a varie trasformazioni. Ciò nonostante, lo studio dell'algebra può ancora svelare molte caratteristiche del gruppo di partenza, ed è in genere molto piú semplice da trattare.

Uno dei colpi di genio di Lie fu accorgersi che l'operazione naturale su queste algebre non è il semplice prodotto AB ma il *commutatore*, definito come $AB-BA$. In SO(2) il commutatore vale zero, dunque $AB=BA$. Ma già per SO(3), gruppo delle rotazioni in tre dimensioni, $AB-BA$ si annulla solo nel caso in cui gli assi relativi ad A e B sono coincidenti o perpendicolari. La geometria del gruppo, come si può notare, si riflette nel comportamento dei commutatori.

Il sogno di Lie di creare l'equivalente di una teoria di Galois per le equazioni differenziali fu realizzato solo all'inizio del Novecento, con la cosiddetta teoria dei «campi differenziali». Ma la sua creatura, l'idea di gruppo di Lie, si è dimostrata assai piú importante, e dotata di vaste applicazioni, di quanto lui stesso sperasse. Magari non è diventata lo strumento per capire se un'equazione differenziale possa o meno essere risolta con certi metodi, ma ha invaso quasi ogni settore della matematica. La teoria di Lie è sfuggita di mano al suo creatore ed è diventata una vera potenza, come lui mai avrebbe immaginato.

Con il senno di poi, il motivo del suo successo è ancora una volta la simmetria, un'idea profondamente radicata in ogni campo della matematica e alla base delle idee chiave della fisica. Le simmetrie sono l'espressione di regolarità nascoste nella trama del mondo, che sono il motore delle leggi fisiche. Un gruppo di simmetrie continue come quello delle rotazioni è strettamente legato alla struttura dello spazio,

Figura 10.2.
Dal gruppo all'algebra di Lie: lo spazio tangente a un cerchio.



del tempo e della materia; inoltre porta in modo implicito a varie leggi di conservazione, come quella secondo la quale l'energia totale in un sistema chiuso non può né aumentare né diminuire. La relazione tra simmetrie e leggi di conservazione, per inciso, fu studiata da Emmy Noether, allieva di Hilbert.

Il prossimo passo viene naturale: studiare i gruppi di Lie proprio come Galois e i suoi successori avevano fatto per i gruppi finiti. Allo scopo dobbiamo far entrare in scena un altro matematico.

Anna Catharina era preoccupata. Suo figlio Wilhelm, secondo il dottore, era «deboluccio e parecchio stravagante [...] in stato di costante agitazione, ma inetto, perennemente assorto nei libri». La salute del ragazzo sarebbe migliorata con l'età, la sua ossessione per la lettura invece no. Poco prima del suo trentanovesimo compleanno, questo topo da biblioteca avrebbe pubblicato una memoria che i posteri definiranno, con qualche ragione, «il piú grande articolo matematico di tutti i tempi». Si tratta di valutazioni ovviamente soggettive, ma l'importanza e la bellezza di quel lavoro sono indiscutibili.

Wilhelm Karl Joseph Killing era figlio di Josef e Anna Catharina Kortenbach, fratello di Karl e Hedwig. Josef Killing era cancelliere di tribunale, sua moglie era figlia di un farmacista; si erano sposati a Burbach, in Westfalia, e poco dopo si erano trasferiti a Medebach, paese di cui Josef divenne poi sindaco. Da lí si spostò a Winterberg e in seguito a Rüthen, continuando a conservare la stessa carica.

La famiglia era abbastanza benestante e poteva permettersi un precettore privato che preparasse Wilhelm per l'ingresso al *Gymnasium* di Brilon, ottanta chilometri a ovest di Dortmund. A scuola sviluppò una passione per le lingue classiche e fu iniziato alle gioie della matematica da un professore, un certo Harnischmacher. Scoprendosi portato per la materia, soprattutto per la geometria, decise di studiarla all'università. Frequentò quella che oggi è l'Università di Münster, allora una semplice Accademia Reale che non offriva corsi di matematica avanzata. Killing dovette quindi istruirsi da sé, affrontando testi classici come i trattati di Plücker (da cui cercò di ricavare da solo qualche nuovo teorema) e le *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss.

Dopo due anni a Münster si trasferí a Berlino, dove la qualità dell'insegnamento era decisamente superiore e dove poté beneficiare della presenza di luminari come Weierstrass, Kummer e von Helmholtz, quest'ultimo uno specialista di fisica matematica che aveva svolto importanti lavori sul legame tra simmetria e conservazione dell'energia. La tesi di Killing aveva come argomento la geometria delle superfici e si basava su alcune idee di Weierstrass. Finiti gli studi, si mise a insegnare matematica e fisica, dando ogni tanto anche lezioni di greco e latino.

Nel 1875 sposò Anna Commer, figlia di un professore di musica. I primi due figli, entrambi maschi, morirono da piccoli; la coppia ebbe poi due femmine, Maria e Anka, e altri due maschi.

Nel 1878 tornò come insegnante alla sua vecchia scuola. Anche se era soggetto a un impegno gravoso, con trentasei ore di lezioni settimanali, trovò comunque il modo di continuare le sue ricerche matematiche (come in genere riescono a fare tutti i geni), pubblicando una serie di articoli su alcune importanti riviste di settore.

Grazie all'interessamento di Weierstrass, nel 1882 fu nominato professore al Lyceum Hosianum di Braunsberg, dove sarebbe rimasto dieci anni. Non era una scuola dalla forte tradizione matematica, e Killing non aveva colleghi con cui discutere del suo lavoro, ma sembrava che stimoli di questo tipo non fossero necessari per spingerlo alla ricerca. Infatti fu proprio in quella situazione di relativo isolamento che fece una delle scoperte piú importanti della storia. Una scoperta che lo lasciò parecchio deluso.

Il suo obiettivo di partenza era molto ambizioso: la classificazione di *tutti* i possibili gruppi di Lie. È da notare che a Braunsberg non arrivavano le pubblicazioni di Lie, di cui quindi Killing aveva un'idea molto approssimata. Ma nel 1884 aveva riscoperto in modo indipendente le algebre di Lie, dunque conosceva il loro collegamento con i rispettivi gruppi e si era subito reso conto che questi oggetti erano probabilmente molto piú trattabili. L'obiettivo si traduceva dunque nella classificazione di tutte le possibili algebre di Lie.

Purtroppo si tratta di un problema tremendamente complicato. Oggi si ritiene che con ogni probabilità non abbia soluzione, nel senso che non esiste un procedimento elementare con cui ricavare tutte le algebre di Lie in modo uniforme e chiaro. Killing dovette quindi accontentarsi di un risultato piú modesto: trovare i costituenti fondamentali a partire dai quali si potevano costruire tutte le algebre. Era come passare dalla descrizione di tutti i possibili stili architettonici alla redazione di un elenco delle forme ammissibili di mattoni.

I mattoni oggi sono noti con il nome di algebre di Lie *semplici* e sono contraddistinti da una proprietà analoga a quella dei gruppi semplici di Galois, che come ricorderete non avevano sottogruppi normali non banali. In effetti un gruppo di Lie semplice è associato a un'algebra semplice, e viceversa. Killing, in un modo che ha dell'incredibile, riuscí a classificare tutte le algebre di Lie semplici, cioè a scrivere il loro elenco completo.

Ai suoi occhi, questa classificazione era la versione limitata di un fenomeno molto piú generale; inoltre si era accorto con crescente frustrazione che per procedere nel lavoro aveva dovuto fare molte ipotesi restrittive. La semplicità gli dava particolarmente fastidio, perché l'aveva costretto a passare dalle algebre sui reali a quelle sui complessi, che si comportavano meglio, certo, ma erano meno direttamente legati a quei problemi geometrici che tanto lo affascinavano. A causa di questi limiti, concluse che il suo lavoro non era degno di essere pubblicato.

Killing riuscí in qualche modo a entrare in contatto con Lie, contatto che si sarebbe rivelato ben poco fruttuoso. Aveva scritto a Klein, che l'aveva indirizzato all'assistente di Lie a Cristiania, Friedrich Engel. I due si trovarono subito sulla stessa lunghezza d'onda; Engel divenne il suo primo sostenitore, lo aiutò a superare qualche difficoltà tecnica e lo incoraggiò a continuare sulla stessa strada. Senza il suo aiuto, forse Killing avrebbe lasciato perdere.

In un primo momento si convinse di aver trovato l'elenco completo delle algebre semplici, cioè tutte e sole le so(n) e su(n), associate rispettivamente al gruppo di nostra conoscenza SO(n), quello delle rotazioni nello spazio di dimensione n, e a SU(n), detto «gruppo unitario speciale», suo analogo nel campo complesso. Secondo lo storico Thomas Hawkins, «Engel reagí sicuramente con stupore alla lettera di Killing in cui presentava le sue ipotesi. Un oscuro professore di liceo, confinato in un istituto delle remote regioni orientali della Prussia dove piú che altro si preparavano futuri ministri di culto, che si permetteva di fare affermazioni cosí nette e di avanzare importanti congetture sulla teoria di Lie dei gruppi di trasformazione».

Nell'estate del 1886 Killing andò a trovare Lie ed Engel a Lipsia, dove nel frattempo si erano trasferiti. Putroppo fu un incontro carico di tensioni. A Lie il lavoro dell'«oscuro professore» proprio non andava giú, e fece di tutto per minimizzare la sua portata.

Killing si accorse ben presto che la sua congettura sulle algebre semplici era sbagliata; infatti ne scoprí un'altra non compresa nel suo primo elenco, il cui gruppo corrispondente oggi è noto come G_2. Aveva dimensione 14 e non sembrava appartenere a nessuna famiglia del tipo SO(n) o SU(n). Si trattava forse di un'eccezione solitaria?

Se questo vi sembra strano, aspettate di vedere la classificazione definitiva, completata nell'inverno del 1887. Oltre alle due famiglie viste sopra, Killing aggiunse le algebre di Lie sp($2n$), corrispondenti ai cosiddetti «gruppi simplettici» Sp($2n$) (a proposito delle prime due famiglie, oggi i gruppi ortogonali vengono divisi in due sottogruppi, a seconda che la dimensione n sia pari o dispari; ci sono precise ragioni per questa distinzione). Inoltre, lo stravagante gruppo G_2 si trovò in compagnia di cinque esemplari, anch'essi privi di legami con le altre famiglie: due di dimensione 56 e una famigliola di tre, con dimensioni rispettive pari a 78, 133 e 248.

La classificazione era dimostrata con lunghi passaggi algebrici, che riducevano la questione a una serie di eleganti problemi geometrici. Partendo da un'ipotetica algebra di Lie semplice, Killing costruiva una configurazione spaziale che oggi si chiama *sistema di radici*; in figura 10.3 ne sono mostrati alcuni esempi in due dimensioni.

Sono strutture molto simmetriche, che ricordano un po' quelle che si formano dentro un caleidoscopio. La somiglianza non è casuale, perché i sistemi di radici, come i cristalli colorati, hanno gruppi di simmetrie interessanti ed eleganti. Oggi sono noti come «gruppi di Weyl» (il che è ingiusto, visto che li ha inventati Killing) e sono proprio gli analoghi a piú dimensioni delle strutture che si vedono in un caleidoscopio.

La strategia di fondo della dimostrazione è questa: la ricerca di tutte le possibili algebre di Lie semplici si può svolgere meglio spezzandole in parti piú trattabili, del tipo di su(n). La classificazione, allora, si riduce allo studio delle proprietà geometriche di questi costituenti elementari e sfrutta le loro notevoli simmetrie. Ottenuto il catalogo di tutte le forme di base possibili, si ritorna indietro al problema originario e si catalogano, a loro volta, tutte le algebre.

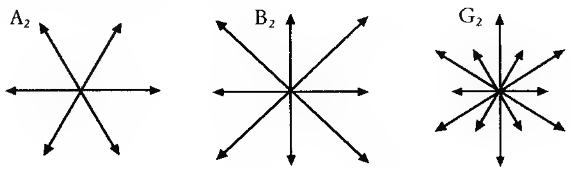
Nelle parole di Killing, «un sistema di radici semplice corrisponde a un gruppo semplice e viceversa. In questo modo si ottengono tutti i gruppi semplici. Per ogni l esistono quattro strutture, a cui nel caso di $l = 2, 4, 6, 7, 8$ vanno aggiunti i gruppi semplici eccezionali». Osserviamo che qui «gruppo», nella terminologia dell'epoca, sta per «gruppo infinitesimale», cioè quella che oggi chiamiamo, appunto, algebra di Lie. Il valore l è la dimensione del sistema di radici.

Le «quattro strutture» citate sono le quattro algebre su(n), so($2n$), so($2n+1$) e sp($2n$), che corrispondono ai gruppi SU(n), SO($2n$), SO($2n+1$) e Sp($2n$): il gruppo unitario, quello ortogonale in dimensione pari e dispari, che abbiamo già incontrato, e il gruppo *simplettico* di dimensione pari. Quest'ultimo è formato dalle simmetrie nel sistema di variabili posizione-quantità di moto introdotte da Hamilton nella sua formulazione della meccanica, e deve avere dimensione pari proprio perché le variabili si presentano a coppie. Oltre a queste quattro famiglie, Killing sosteneva l'esistenza di altre sei, e solo sei, algebre di Lie semplici, dette *eccezionali*.

Era quasi nel giusto. Nel 1894 il francese Élie Cartan si accorse che le due algebre eccezionali di dimensione 56 erano in realtà la stessa struttura vista in due modi diversi. Quindi le algebre (o i gruppi) semplici eccezionali sono solo cinque: oltre la vecchia G_2 ce n'erano altre quattro, oggi note come F_4, E_6, E_7 ed E_8.

Se ci pensate bene, è una situazione davvero strana. L'esistenza di quelle famiglie infinite, al variare di n, è abbastanza ragionevole, perché sono tutte collegate a vari tipi di proprietà geometriche. Ma i cinque gruppi eccezionali sembrano saltar fuori dal nulla, non offrono rappresentazione geometrica di sorta e hanno dimensioni bizzarre: 14, 56, 78, 133 e 248. Cos'hanno di speciale questi numeri?

Figura 10.3.
Sistemi di radici in due dimensioni.



È quasi come se volessimo fare un catalogo di tutti i mattoni a nostra disposizione per costruire una casa. L'inizio è sensato:
- parallelepipedi di misura 1, 2, 3, ...
- cubi di misura 1, 2, 3, 4, ...
- lastre di misura 1, 2, 3, 4, ...
- piramidi di misura 1, 2, 3, 4, ...

Ma poi troviamo:
- un tetraedro di misura 14
- un ottaedro di misura 56
- tre dodecaedri di misura 78, 133 e 248

E basta, non c'è altro.

Perché saltano fuori questi mattoni dalle strane forme? A che diavolo servono?

Sembrava del tutto insensato, tanto che Killing, irritato dall'esistenza dei gruppi eccezionali, sperò a lungo che fossero il risultato di un suo errore, emendabile con ricerche piú accurate. Rovinavano l'eleganza della dimostrazione, ma sembravano non avere nessuna intenzione di andarsene. In effetti sono rimasti lí, e oggi iniziamo a capire perché. Sotto molti aspetti, i cinque gruppi eccezionali si stanno rivelando piú interessanti delle quattro famiglie infinite; ad esempio trovano importanti applicazioni nella fisica delle particelle elementari, come vedremo. E sono uniti tra loro da un principio unificatore ancora non ben compreso, che li lega ai quaternioni di Hamilton e a una loro stravagante generalizzazione, gli ottetti. Anche su questo torneremo in seguito.

Killing aveva avuto una serie straordinaria di colpi di genio. A dire il vero, la dimostrazione conteneva qualche errore, qualche piccola lacuna, tutti comunque riparati da altri matematici già molto tempo fa.

Dunque questo era il contenuto del «piú grande articolo matematico di tutti i tempi». Quale accoglienza gli riservarono i colleghi?

Tiepida. Il fatto che Lie ne parlasse apertamente male non aiutava la sua popolarità. Per qualche ragione ce l'aveva con Killing ed era convinto che non avrebbe mai combinato nulla di importante. C'è da dire, naturalmente, che Lie avrebbe voluto dimostrare lui il teorema di classificazione, piú di ogni cosa al mondo; vistosi superato, aveva usato la vecchia e collaudata tecnica di denigrare il lavoro dell'avversario. Solo Lie doveva avere l'esclusiva sui suoi gruppi, gli altri producevano risultati insensati. Non lo disse mai in questi termini espliciti, ma è probabile che lo pensasse.

Anche il fatto che Killing non avesse un'alta opinione del suo teorema non ne aiutava la diffusione. Per lui era solo il pallido riflesso di un'impresa ben piú grande, che non era riuscito a compiere: la classificazione di *tutti* i gruppi di Lie. Era dotato di non comune modestia e Lie fece di tutto per non aumentare la sua autostima.

Ad ogni modo, si trattava di un lavoro in anticipo sui tempi. Ben pochi colleghi si accorsero di quanto la teoria dei gruppi di Lie fosse promettente, né erano in grado di prevedere che sarebbe diventata cosí importante. I piú pensavano che si trattasse di una parte abbastanza tecnica della geometria, che aveva in qualche modo a che fare con le equazioni differenziali.

Killing, poi, era un convinto cattolico, con un forte senso del dovere e incline all'umiltà, come il suo modello di vita, san Francesco d'Assisi. A trentanove anni, insieme con la moglie, entrò nel cosiddetto «Terzo Ordine», oggi chiamato Ordine francescano secolare. Doveva essere, in sintesi, una brava persona, oltre a un gran lavoratore molto amato dai suoi studenti. Politicamente era conservatore e nazionalista, e fu molto amareggiato dalla decadenza sociale della Germania dopo la Prima guerra mondiale. La morte dei due figli, nel 1910 e 1918, deve aver esasperato questo stato d'animo.

Il reale valore delle sue ricerche fu svelato nel 1894, quando Cartan ridimostrò il teorema di classificazione nella sua tesi di dottorato e fece un bel passo avanti riscrivendo tutto in termini di matrici. Il francese riconobbe sempre i giusti meriti di Killing, dicendo che il suo compito era stato risistemare la teoria, correggere qualche imprecisione (e qualche errore piú serio) e modernizzare la terminologia. Però si diffuse nella comunità matematica la leggenda secondo la quale il lavoro di Killing era pieno di strafalcioni e che il vero scopritore della classificazione doveva essere Cartan. I miei colleghi sono in genere pessimi storici e tendono a citare solo gli articoli che conoscono senza prendersi la briga di controllare quelli che li hanno preceduti. Cosí molte delle idee di Killing furono attribuite a Cartan.

Uno sguardo ai lavori originali basta a disperdere ogni dubbio. Le idee di Killing sono già chiare ed esplicite, le dimostrazioni forse un po' antiquate nello stile, ma quasi tutte corrette. Soprattutto, la strategia generale è molto elegante ed è scelta con cura per arrivare al risultato desiderato. È matematica di prima scelta, indubbiamente farina del suo sacco.

Purtroppo all'epoca quasi nessuno lesse gli articoli di Killing, ma solo quelli di Cartan. Qualche anno piú tardi, però, arrivarono i primi riconoscimenti all'opera del tedesco; nel 1900 vinse il premio Lobačevskij della Società fisico-matematica di Kazan, attribuito prima di allora solo a un altro studioso (Lie, per la precisione).

Killing morí nel 1923. Anche oggi il suo nome non è molto conosciuto, non come meriterebbe uno dei piú grandi matematici della storia. La sua eredità, però, rimane immortale.

Capitolo undicesimo
L'impiegato dell'Ufficio brevetti

All'inizio del Novecento i gruppi iniziarono a fare capolino anche nella fisica delle particelle elementari, settore di ricerca in cui avrebbero creato scompiglio proprio come in matematica.

Nell'*annus mirabilis* 1905 l'uomo che sarebbe diventato lo scienziato per antonomasia pubblicò tre articoli che provocarono tre rivoluzioni in tre distinte branche della fisica. L'autore, all'epoca, non era un accademico. Aveva studiato all'università ma non era riuscito a ottenere un posto come insegnante o ricercatore e quindi aveva accettato un impiego presso l'Ufficio brevetti di Berna. Sto parlando, ovviamente, di Albert Einstein.

Il suo nome è il simbolo stesso della fisica moderna e per molti anche del genio matematico. In realtà Einstein era un matematico competente ma non originale a livello di Galois o Killing. La sua creatività si esplicava non nei teoremi ma in una straordinaria intuizione dei meccanismi del mondo fisico, che era in grado di descrivere facendo buon uso della matematica disponibile all'epoca. Aveva anche un certo gusto per il rigoroso inquadramento filosofico delle teorie, che dovevano derivare da semplici principî generali; il faro che guidava le sue ricerche era l'eleganza, il rigore, piú che una vasta conoscenza dei fatti sperimentali. Era fermamente convinto che le osservazioni piú importanti si potessero condensare in pochi, fondamentali punti chiave. La porta d'ingresso al mondo della verità, per lui, era la bellezza.

Sulla sua vita e sulle sue opere si sono consumati fiumi di inchiostro e secoli di ricerche. Questo capitolo non può sperare di competere per completezza o erudizione con questi studi, ma non posso non parlare di lui: dopo tutto, è stato Einstein a mettere in moto una serie di eventi che avrebbe portato la matematica della simmetria a diventare parte integrante della fisica delle particelle elementari. Non credo che lui la pensasse in questo modo, convinto com'era che la matematica non fosse che la serva, a volte recalcitrante, della fisica. Ci sarebbe voluta un'altra generazione, che allargasse il sentiero da lui tracciato e mettesse ordine sulla strada, ripulendola dai resti lasciati dai suoi sforzi pionieristici e arrivando alfine a scoprire l'eleganza e la profondità delle idee matematiche alla base del suo lavoro.

Dobbiamo quindi ripercorrere ancora una volta la sorprendente storia di come un impiegato dell'Ufficio brevetti (perito di terza classe in prova, per la precisione) sia diventato il piú famoso scienziato al mondo. Per non far torto agli altri protagonisti della nostra storia mi limiterò qui a trattare i fatti piú importanti. Se volete leggere una biografia completa e obiettiva di Einstein vi consiglio il classico *Sottile è il Signore* di Abraham Pais[1].

Sottile... ma non malizioso, secondo uno dei detti piú celebri del grande scienziato. Einstein non era granché interessato alla religione; era convinto che l'universo fosse in linea di principio conoscibile e che il suo funzionamento si basasse su leggi matematiche. Spesso parlava di un'entità suprema, ma solo come simbolo dell'ordine universale, non in qualità di essere soprannaturale dotato di un interesse specifico nelle vicende umane. Non credeva in alcun dio storico e non seguiva i riti di alcuna religione.

Si dice in generale che Einstein sia l'erede naturale di Newton. In epoche precedenti altri grandi scienziati avevano aggiunto nuovi edifici alla mirabile architettura newtoniana, al «sistema del mondo» (come s'intitola il terzo libro dei *Principia*); lui però ne cambiò letteralmente il progetto. Il piú importante dei suoi predecessori era stato James Clerk Maxwell, la cui teoria dell'elettromagnetismo aveva unificato i fenomeni elettrici e magnetici, luce compresa, portandoli sotto l'ala del metodo newtoniano. Einstein andò assai piú in là. Per ironia della sorte, i suoi cambiamenti epocali, che approdarono a una diversa teoria della gravità, partirono da considerazioni sulla teoria maxwelliana delle onde elettromagnetiche, cioè di luce e affini. Ironia ancora piú beffarda, una caratteristica fondamentale di questa teoria, e cioè la natura ondulatoria della luce, fu strenuamente negata da Newton:

e pensare che l'esperimento oggi piú citato che dimostra questo fatto fu ideato proprio da lui.

L'interesse scientifico nei confronti della luce risale almeno ad Aristotele, che da bravo filosofo si poneva anche domande da scienziato. Come funziona il meccanismo della visione? Secondo la teoria aristotelica, quando osserviamo un oggetto quest'ultimo turba in qualche modo il mezzo che si interpone tra noi e lui (oggi diremmo semplicemente «l'aria»); l'occhio registra il cambiamento in questo mezzo e trasmette dunque la sensazione del vedere.

Nel Medioevo la teoria fu rigirata: erano i nostri occhi a emettere un qualche tipo di raggi che illuminavano tutto ciò che trovavano lungo il cammino. Non erano piú gli oggetti a trasmettere segnali, dunque, ma l'occhio a lasciare tracce di sé sul mondo.

Alla fine si capí che la visione dipende dalla riflessione della luce, la cui fonte principale è il Sole. Per via sperimentale si verificò che i raggi sono rettilinei e che la riflessione avviene secondo le leggi dell'ottica quando questi fasci luminosi rimbalzano su una superficie idonea. In sintesi, il Sole emette i suoi raggi che arrivano dappertutto, rimbalzano e si disperdono; qualcuno di questi arriva all'occhio di un osservatore umano che riceve un segnale proveniente da una precisa direzione e lo trasmette al cervello, dove si stabilisce che cosa si sta vedendo.

Allora la domanda diventa: che cos'è la luce? È qualcosa che si comporta in modo assai strano. Oltre alla riflessione è soggetta anche alla rifrazione, cioè a un repentino cambio di direzione quando attraversa il confine tra due mezzi diversi, come l'acqua e l'aria. È la ragione per cui un bastone immerso a metà nell'acqua appare spezzato se visto da fuori, nonché il principio secondo il quale funzionano le lenti.

Ancora piú misterioso è il fenomeno della diffrazione. Nel 1664 l'erudito enciclopedico Robert Hooke, la cui carriera scientifica incrociò molte volte quella di Newton, scoprí che posando una lente sopra uno specchio piano si potevano osservare dei sottili anelli concentrici colorati, poi chiamati «anelli di Newton», perché fu lui a studiarli in profondità. Oggi riteniamo che questo esperimento mostri con chiarezza la natura ondulatoria della luce; gli anelli sono figure di interferenza, piú o meno scuri e colorati a seconda che le varie onde si cancellino o si rafforzino a vicenda. Ma Newton non credeva affatto che la luce fosse un'onda: visto che viaggiava sempre in linea retta, doveva essere per forza costituita da un flusso di «corpuscoli», cioè particelle, come scrisse chiaramente nella sua *Ottica* del 1705. Grazie alla teoria corpuscolare, si poteva spiegare la riflessione con gran semplicità: erano le particelle di luce che rimbalzavano dopo aver colpito una superficie adatta (riflettente). Molto piú complesso era giustificare la rifrazione e praticamente impossibile render conto della diffrazione.

Nel tentativo di capire cosa deviasse il corso dei raggi luminosi, Newton decise che la causa andava ricercata nel mezzo, non nella luce in sé. Questa convinzione lo portò a ipotizzare l'esistenza di un «etere» che pervadeva l'atmosfera, capace di vibrare *piú veloce della luce*. Decise anche che il calore radiante era una prova a favore della sua ipotesi, perché aveva visto che i raggi caloriferi erano in grado di attraversare il vuoto; dunque nel vuoto doveva esserci qualcosa di diverso dall'aria, in grado di trasmettere le vibrazioni e causare rifrazioni e diffrazioni:

> Non è forse il calore della stanza riscaldata trasportato attraverso il vuoto dalle vibrazioni di un mezzo molto piú sottile dell'aria, ivi rimasto anche dopo lo svuotamento? E non è questo mezzo lo stesso attraverso il quale la luce viene riflessa e rifratta, un mezzo che vibra permettendo alla luce stessa di comunicare il calore ai corpi e di trasmettere e riflettere con maggiore facilità?[2]

Quando rileggo queste righe non posso fare a meno di pensare al mio amico Terry Pratchett, autore della celebre saga fantasy del Mondo Disco, un universo surreale popolato da maghi, streghe, nani, troll e quant'altro, rappresentazione satirica della nostra società. Nel mondo di Pratchett la luce viaggia circa alla velocità del suono, ed è per questo che all'alba la si vede arrivare chiaramente. Controparte della luce è il buio (considerato un'entità materiale, come quasi tutto ciò che si trova in Mondo Disco), che viaggia piú veloce della luce perché deve togliersi dai piedi al piú presto quando questa arriva. Ciò avrebbe molto senso anche nel nostro universo, se non fosse per la seccante osservazione che le cose non stanno proprio cosí.

La teoria della luce di Newton ha lo stesso difetto. Non è affatto un'ipotesi sciocca, perché all'epoca sembrava risolvere molti problemi fondamentali. Purtroppo però si basa su un equivoco di fondo, cioè la distinzione tra calore radiante e luce, considerati due fenomeni diversi. Newton credeva che quando un raggio di luce incideva su una superficie ne eccitasse una vibrazione calorica, simile a quella responsabile per i fenomeni di diffrazione e rifrazione.

Nacque cosí l'*etere luminifero*, idea che si sarebbe rivelata molto dura a morire, anche perché, quando in seguito si scoprí che la luce era un'onda, l'etere forniva il mezzo ideale per la trasmissione dell'onda stessa (oggi sappiamo che la luce, in realtà, è un po' onda e un po' particella – la famosa dualità. Ma sto correndo troppo).

Ma che cos'era, di preciso, questo etere? Newton onestamente ammetteva di non saperlo. Sosteneva però che doveva essere composto da particelle piú piccole e leggere di quelle dell'aria o della luce perché, proprio come il buio nel Mondo Disco, l'etere deve togliersi dai piedi per far passare la luce: «La notevolissima piccolezza di queste particelle può contribuire alla forza con cui esse si allontanano l'una dall'altra, rendendo cosí il mezzo assai piú rarefatto ed elastico dell'aria, e di conseguenza assai meno capace di resistere al moto dei proietti e assai piú capace di espandersi»[3].

Qualche anno prima, nel 1678, il fisico olandese Christiaan Huygens nel suo *Traité de la lumière* aveva avanzato una diversa ipotesi, cioè quella ondulatoria. Ammettendo che la luce fosse un'onda, si riuscivano a spiegare facilmente riflessione, rifrazione e diffrazione, perché sono fenomeni analoghi a quelli osservabili, ad esempio, nelle onde sulla superficie dell'acqua. L'etere era per la luce quello che l'acqua era per le onde marine: il mezzo di trasmissione. Newton si era dichiarato in disaccordo, e ne era scaturito un confuso dibattito in cui entrambi i contendenti partivano da punti di partenza errati sulla natura di queste ipotetiche onde.

Tutto cambiò con l'entrata in scena di Maxwell, un altro scienziato ben poggiato sulle spalle di un gigante che l'aveva preceduto.

La stufetta elettrica, l'illuminazione casalinga, la radio, la televisione, il frullatore, il forno a microonde, il frigorifero, l'aspirapolvere e una serie infinita di macchinari industriali devono tutti la loro esistenza alle intuizioni di Michael Faraday, nato nel 1791 a Newington Butts (oggi Elephant and Castle), Londra, che partendo da umili origini divenne uno dei piú eminenti scienziati vittoriani. Suo padre era un fabbro molto religioso, che apparteneva alla minoranza protestante dei sandemaniani.

Nel 1805 il giovanissimo Faraday iniziò a lavorare come apprendista legatore e nel tempo libero cominciò a fare esperimenti, soprattutto di chimica. Il suo interesse per la materia si acuí quando, nel 1810, divenne membro della City Philosophical Society, un'associazione formata da giovani che si riunivano per discutere di scienza. Nel 1812 ottenne un invito per presenziare alle lezioni finali del corso che Sir Humphry Davy, il piú famoso chimico d'Inghilterra, teneva alla Royal Institution. Ispirato, si presentò dal luminare chiedendogli di lavorare per lui. Superò un colloquio ma gli fu risposto che non c'erano posti liberi. Però subito dopo l'assisistente di Davy fu licenziato per aver provocato una rissa e Faraday lo sostituí.

Dal 1813 al 1815 i due viaggiarono per tutta Europa. Napoleone aveva garantito un salvacondotto a Davy per sé, la moglie e un «aiutante», ruolo che era stato accettato da Faraday. Purtroppo la signora intendeva troppo alla lettera il titolo ufficiale del giovane, pretendendo di essere servita da un Faraday sempre piú inviperito. Nel 1821 gli eventi presero una piega piú favorevole: ottenne una promozione e si sposò con Sarah Barnard, figlia di un autorevole membro della confraternita sandemaniana. Ma soprattutto vide i primi frutti concreti delle sue ricerche nel campo dell'elettricità e del magnetismo. Basandosi su alcuni risultati ottenuti in precedenza dal danese Hans Ørsted, Faraday dimostrò che una corrente passante per un solenoide posto accanto a un magnete fa nascere una forza che agisce tra i due oggetti. Su questo fenomeno si basa il principio di funzionamento del motore elettrico.

Le sue ore passate in laboratorio furono sempre piú sacrificate a impegni amministrativi e didattici, ma anche in questo campo ottenne eccellenti risultati. Nel 1826 iniziò una serie di conversazioni serali sulla scienza e le famose Christmas Lectures («Lezioni di Natale») per i giovani, due tradizioni che non si sono mai interrotte da allora. Oggi vengono trasmesse in televisione, cioè con uno dei mezzi che le scoperte di Faraday hanno reso possibili. Nel 1831, tornato al laboratorio, scoprí il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, un evento che avrebbe rivoluzionato l'industria dell'Ottocento, portando all'invenzione dei generatori e dei trasformatori. Si convinse in tal modo

che l'elettricità non era un fluido, come allora si pensava, ma una particolare forza che agiva tra particelle materiali.

La fama scientifica in genere conduce a essere nominati in un prestigioso ruolo dirigenziale, il che ha come primo effetto quello di stroncare l'attività di ricerca che si vorrebbe ricompensare. A Faraday fu riservata la direzione scientifica della Trinity House, un ente preposto alla sicurezza della navigazione. Diede un contributo anche in questo campo, inventando una lampada a olio piú efficiente che produceva una luce piú brillante, rendendola perfetta per i fari. Nel 1840 divenne un anziano della comunità sandemaniana, ma in quel periodo iniziò ad accusare vari problemi di salute. Nel 1858 gli fu concesso l'onore di vivere a spese della Corona in una casa di rappresentanza a Hampton Court, un tempo residenza di Enrico VIII. Morí nel 1867 e fu sepolto nel cimitero di Highgate.

Faraday fu un vero rivoluzionario nel campo sperimentale e tecnologico, ma i suoi contributi teorici (forse a causa della formazione da autodidatta) si rivelarono meno importanti. Le sue spiegazioni relative ai princípî di funzionamento delle macchine facevano leva su strane analogie meccaniche. Nel 1831, l'anno in cui veniva scoperta l'induzione elettromagnetica, cioè il modo di trasformare il magnetismo in elettricità, un avvocato scozzese diventò padre del suo primo (e unico) figlio. Il ricco signore era molto piú interessato alle sue proprietà terriere che ad altro, ma prese comunque molto sul serio il compito di istruire il piccolo «Jamesie», al secolo James Clerk Maxwell.

Si rivelò subito un bambino intelligente e affascinato dal mondo meccanico. Chiedeva in continuazione «come funziona quella cosa? cosa fa?» Il padre cercava di soddisfare al meglio le sue curiosità, ma se non entrava sufficientemente nei particolari il piccolo, implacabile, lo incalzava: «E quella cosa lí dentro piú piccola che fa?»

La madre morí di cancro quando James aveva nove anni, e la perdita fece avvicinare padre e figlio. Fu mandato a studiare alla Edinburgh Academy, scuola prestigiosa che si concentrava sulla cultura classica e che richiedeva agli studenti ordine, disciplina e molto studio, oltre a una totale mancanza di spirito critico, che sarebbe stato d'impiccio per l'ordine, la disciplina e lo studio. Jamesie non era proprio uno scolaro modello. Il fatto che il padre, ossessionato dall'igiene, lo obbligasse ad andare in giro con una divisa studiata appositamente, composta anche da una tunica ornata di pizzo, non lo rendeva certo popolare tra i compagni. Lo chiamavano «cretinetto», ma il ragazzo era testardo, anche se eccentrico, e si guadagnò il loro rispetto.

La scuola ebbe almeno un effetto positivo su Maxwell: suscitò il suo interesse per la matematica. In una lettera al padre scrisse di essere impegnato nella costruzione di «un tetra-edro, un dodeca-edro e due altri edri che non so come si chiamano» (erano presumibilmente un otta- e un icosa-). A quattordici anni vinse un premio per aver riscoperto da solo il cosiddetto «ovale di Cartesio», una curva piana inventata due secoli prima dal celebre filosofo. Del suo scritto fu data pubblica lettura alla Royal Society di Edimburgo.

James si dilettava anche di poesia, ma il suo vero talento era la matematica. A sedici anni si iscrisse all'Università di Edimburgo, per poi trasferirsi a Cambridge, faro della matematica britannica. William Hopkins, che lo preparava agli esami, disse che in vita sua non aveva mai incontrato un individuo cosí fuori dal comune.

Ottenuta la laurea rimase a Cambridge per proseguire con i corsi avanzati, dedicandosi in particolare allo studio dei fenomeni luminosi in laboratorio. La lettura del trattato sulle ricerche sperimentali di Faraday lo spinse a dedicarsi all'elettromagnetismo. Per farla molto breve, Maxwell prese gli strani modelli meccanici del suo predecessore e nel 1864 riuscí a distillarne una teoria matematicamente coerente, basata su quattro sole equazioni (con le convenzioni dell'epoca risultavano piú di quattro, ma oggi noi impieghiamo la notazione vettoriale e risparmiamo inchiostro. Con un particolare formalismo si possono addirittura ridurre a una sola). Le leggi risultanti descrivono i fenomeni elettromagnetici come generati da due *campi*, uno elettrico e uno magnetico, che pervadono ogni regione dello spazio. Questi enti forniscono l'intensità e la direzione della forza elettrica o magnetica presente in ogni punto.

Le quattro equazioni di Maxwell hanno una semplice descrizione in termini fisici. Due ci dicono che l'elettricità e il magnetismo non si creano né si distruggono; la terza descrive gli effetti di un campo magnetico variabile sul campo elettrico in cui è immerso, e traduce in linguaggio matematico l'induzione di Faraday; la quarta, viceversa, descrive gli effetti di un campo elettrico variabile sul campo magnetico in cui è immerso. Sono eleganti anche se descritte a parole.

Con qualche calcolo non particolarmente difficile, Maxwell ebbe la conferma di un fatto che sospettava da tempo: la luce non era che un'onda elettromagnetica, una perturbazione nei campi elettrico e magnetico che si propaga nel tempo e nello spazio. Questo perché a partire dalle sue equazioni si poteva derivare un oggetto matematico assai riconoscibile, cioè un'equazione d'onda che descriveva un fenomeno propagantesi esattamente alla velocità della luce.

E in natura solo una cosa viaggia veloce come la luce.

A quel tempo si dava per scontato che le onde avessero bisogno di un mezzo per diffondersi, perché erano viste, appunto, come perturbazioni, disturbi nel mezzo stesso. Il candidato piú naturale per la luce era il buon vecchio etere. I calcoli dicevano che le onde luminose dovevano vibrare lungo piani perpendicolari alla direzione di spostamento, il che spiegava la confusione di Newton e Huygens, entrambi convinti che la luce vibrasse lungo la direzione di moto.

Dalla teoria di Maxwell si ricavava un'altra importante conseguenza: la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica (cioè la distanza tra due creste) poteva essere un valore a piacere. Si sapeva che la luce visibile occupava lunghezze d'onda molto piccole, ma la teoria prediceva l'esistenza di radiazioni molto lunghe. Era un sfida sperimentale sufficientemente ardua da spingere Heinrich Hertz a generare in laboratorio onde di questo tipo, e piú tardi Guglielmo Marconi a mettere in pratica la scoperta costruendo i primi radiotrasmettitori: dall'oggi al domani, l'umanità aveva scoperto che poteva parlarsi quasi istantaneamente da un angolo all'altro del pianeta. Con lo stesso principio oggi spediamo immagini, osserviamo il cielo con i radar ed evitiamo di perderci grazie al GPS.

Sfortunatamente, però, l'etere rimaneva un'entità problematica. Se fosse davvero esistito, allora la Terra, orbitando attorno al Sole, avrebbe dovuto essere in moto rispetto a questa misteriosa sostanza, un moto che avrebbe dovuto essere registrabile; altrimenti l'idea sarebbe stata da abbandonare perché non verificabile sperimentalmente.

La risposta a questo rebus avrebbe reso irriconoscibile la fisica contemporanea.

Nell'estate del 1876 la ditta Israel e Levi, gestita da due mercanti ebrei di Ulma, nel Württemberg, si ampliò grazie all'arrivo di un nuovo socio, Hermann Einstein. In gioventú era stato un piccolo prodigio della matematica, ma la famiglia non poteva permettersi di farlo studiare fino all'università. Ora stava per diventare un commerciante di materassi di piume.

Nell'agosto dello stesso anno Hermann sposò Pauline Koch nella sinagoga di Cannstadt. La coppia si sistemò in una casa della Banhofstrasse, dove meno di otto mesi dopo nacque il primo figlio. Secondo quanto recita il certificato di nascita, «il commerciante Hermann Einstein [...] ha dichiarato che il 14 marzo dell'anno 1879, alle ore 11,30 antimeridiane è nato in Ulma, nella sua casa, da sua moglie Pauline Einstein, nata Koch, di religione israelitica, un bimbo di sesso maschile cui è stato dato il nome di Albert». Cinque anni dopo nacque la sorella Maria, che sarebbe stata sempre molto legata al fratello.

Gli Einstein non erano osservanti e cercavano in tutti i modi di integrarsi con la cultura del loro Paese. All'epoca, gran parte degli ebrei tedeschi era «assimilazionista», cioè cercava di modificare aspetti della propria tradizione in modo da amalgamarsi meglio con i concittadini di fedi diverse. I nomi scelti da Hermann e Pauline per i figli riflettono questa tendenza: non erano tipicamente ebraici (anche se in teoria Albert era stato chiamato cosí in modo da conservare l'iniziale del nonno Abraham). A casa Einstein non si parlava quasi mai di religione, né si onoravano le feste e i rituali.

Le memorie della sorella, pubblicate nel 1924, sono la principale fonte di informazione circa le prime esperienze e la personalità del giovane Albert. Pare che alla sua nascita la madre si fosse spaventata perché aveva la testa molto grande, con la nuca di forma inconsueta. «È troppo pesante! Troppo!» gridò quando lo vide per la prima volta. Il timore che il bimbo si rivelasse ritardato crebbe di fronte alla sua lentezza nell'iniziare a parlare. Ma il piccolo stava solo aspettando di saperne abbastanza e di essere sicuro di venire capito. In seguito disse che aveva deciso di iniziare a parlare non prima di aver imparato a mettere insieme frasi di senso compiuto, che provava e riprovava in testa fino a quando non era sicuro che fossero giuste.

La madre era una valente pianista. Tra i sei e i tredici anni, Albert prese lezioni di violino da un certo maestro Schmied. Piú avanti con gli anni avrebbe approfittato spesso dello strumento, ma confessò che da bambino si era annoiato molto.

Nel frattempo il commercio dei materassi era andato male e Hermann si era riconvertito al settore delle forniture di gas e acqua, in società con il fratello Jakob. Questi era un ingegnere e un imprenditore che aveva investito molto denaro nell'impresa di famiglia. A un certo punto decise di entrare nel ramo elettrico, piú precisamente nella fabbricazione di componenti per le centrali. La società fu fondata ufficialmente nel 1885 e i due si trasferirono a Monaco, con l'aiuto finanziario del padre di Pauline e di altri membri della famiglia. All'inizio tutto sembrava andare a gonfie vele: la «Elektronische Fabrik J. Einstein und Co.» prosperava e faceva affari fino in Italia.

Einstein disse sempre che l'interesse per la fisica gli venne improvvisamente il giorno in cui suo padre gli mostrò una bussola, a quattro o cinque anni. La capacità dello strumento di indicare sempre la stessa direzione, indipendentemente da come lo si muovesse, affascinò il piccolo Albert, che ebbe cosí un primo assaggio delle meraviglie nascoste della natura. Fu un'esperienza quasi mistica, a quanto pare.

A scuola Einstein si rivelò un bravo studente, ma durante i primi anni non mostrò nessun talento particolare. Era lento, metodico e otteneva buoni voti, ma non socializzava con i compagni. Preferiva giocare da solo; il suo passatempo preferito era costruire castelli di carte. Non gli piaceva l'attività fisica. Entrato al *Gymnasium* nel 1888, si scoprí bravo in latino e in matematica, materie in cui sarebbe sempre stato il primo della classe. Le sue curiosità matematiche erano stimolate dallo zio Jakob, che essendo ingegnere aveva conoscenze piuttosto avanzate. In genere gli assegnava un problema da risolvere e Albert andava in brodo di giuggiole quando ci riusciva. Max Talmud, un amico di famiglia, fu un'altra figura significativa nella formazione di Einstein. Era uno studente di medicina squattrinato, che Hermann e Pauline invitavano a cena tutti i giovedí. Max portò ad Albert molti libri divulgativi e lo iniziò addirittura alla filosofia kantiana. I due discutevano di matematica e filosofia per ore. Talmud scrisse poi che non aveva mai visto il ragazzo giocare con i coetanei e che i libri che gli faceva leggere erano complessi, non all'acqua di rose. Si rilassava solo quando suonava Beethoven o Mozart, accompagnato al piano dalla madre.

La sua passione per la matematica ricevette un'ulteriore spinta nel 1891, quando comprò una copia degli *Elementi*, che sarebbe diventato il suo «libro sacro della geometria». Ciò che piú lo colpiva in quelle pagine era il rigore logico, il modo impeccabile in cui Euclide aveva organizzato il flusso del discorso. A causa forse dell'ora di religione a scuola (cattolica, obbligatoria senza possibilità di scelta) e delle lezioni casalinghe di dottrina ebraica, per un certo periodo il giovane Albert coltivò un forte sentimento religioso. Lo studio dell'ebraico in vista del *bar mitzvah*, però, si interruppe bruscamente: il ragazzo aveva trovato la sua vera vocazione.

Dal 1890 in poi la ditta dei fratelli Einstein cominciò a perdere colpi. Le vendite in Germania languivano, cosí il loro rappresentante in Italia, Lorenzo Garrone, consigliò ai due di trasferirsi in un mercato piú promettente, quello del suo Paese. Nel giugno 1894 la società fu sciolta, la casa di famiglia messa in vendita e gli Einstein al completo traslocarono a Milano – tutti tranne Albert, che doveva finire la scuola e rimase solo a Monaco. Da Milano passarono poi a Pavia, dove fu fondata la «Einstein e Garrone».

Fu un periodo molto deprimente per il giovane. Oltre tutto, si profilava dietro l'angolo la chiamata alla leva. Fu cosí che senza dire niente ai genitori decise di raggiungerli in Italia. Convinse un medico a rilasciargli un certificato in cui lo dichiarava sofferente di malattie nervose (il che avrebbe potuto anche essere vero), ottenne il congedo anticipato da scuola e si presentò bel bello a Pavia nella primavera del 1895. I genitori la presero molto male. Albert promise che avrebbe terminato gli studi e avrebbe sostenuto l'esame di ammissione al prestigioso Politecnico di Zurigo (ETH, Eidgenossische Technische Hochschule).

Il sole dell'Italia gli giovò parecchio. A ottobre dello stesso anno si presentò a Zurigo ma fu bocciato a causa dei pessimi voti nelle prove umanistiche (in matematica e scienze non ebbe invece problemi) e della sua scrittura confusa. Le autorità del Politecnico gli comunicarono che avrebbe potuto entrare l'anno seguente senza esami se solo avesse conseguito la maturità svizzera. Si iscrisse allora alla scuola superiore di Aarau e prese una stanza a pigione nella casa della famiglia Winteler. Albert si affezionò moltissimo a questi genitori adottivi e ai loro sette figli. Anche la scuola gli piacque, perché si respirava uno «spirito liberale» grazie ai suoi ottimi insegnanti, intellettuali che non si piegavano supinamente di fronte all'autorità costituita.

Per la prima volta era felice di frequentare le lezioni. Si fece piú sicuro di sé e iniziò a esprimere pubblicamente le sue opinioni. In un compito in classe di francese scrisse che nel futuro avrebbe desiderato studiare matematica e fisica.

Nel 1896 entrò al Politecnico e contestualmente rinunciò alla cittadinanza tedesca, rimanendo apolide. Un quinto circa del mensile che gli passava la famiglia andava a finire in un fondo che gli sarebbe servito a pagare le pratiche per la cittadinanza svizzera. Ma anche la nuova impresa del padre e dello zio fallí, mangiandosi gran parte del patrimonio famigliare. Jakob si riprese e trovò un posto fisso in una grande azienda, mentre Hermann era caparbiamente deciso a lanciarsi in un'altra avventura. Ignorando i consigli del figlio, fondò un'azienda a Milano che durò solo due anni. Le disavventure economiche del padre furono causa di grande tristezza in famiglia, fino a quando questi non si decise a seguire le orme del fratello e accettare un posto come installatore di centrali.

Albert trascorse gli anni del Politecnico quasi sempre chiuso nel laboratorio di fisica. Una volta ideò un esperimento per scoprire se davvero la Terra era in moto relativo rispetto all'etere, ma il suo professore non gli diede il permesso di continuare. Il docente era Heinrich Friedrich Weber, che non sembrava averlo in grande simpatia: «Caro Einstein, lei è un giovanotto molto intelligente, davvero. Ha solo un grave difetto: non accetta ordini da nessuno».

L'ostilità era reciproca: Albert riteneva i corsi di Weber troppo antiquati. Soprattutto fu deluso dalla mancanza nel programma della teoria di Maxwell, che si lesse da solo su un testo tedesco uscito nel 1894. Seguí anche le lezioni di due celebri matematici, Adolf Hurwitz e Hermann Minkowski. Quest'ultimo era uno studioso dalla profonda originalità di pensiero, che aveva fatto scoperte fondamentali nel campo della teoria dei numeri e avrebbe in seguito dato un importante contributo alla relatività. In quegli anni Albert lesse anche i testi di Darwin sull'evoluzione.

Superato il primo livello, Einstein aveva bisogno di un posto da assistente che gli consentisse di pagarsi la prosecuzione degli studi. Weber fece al riguardo vaghe promesse, che però non si concretizzarono mai. Il giovane non gliela perdonò. Scrisse una lettera a Hurwitz, che rispose formalmente in modo positivo, ma anche in questo caso non se ne fece nulla. Alla fine del 1900 era ufficialmente disoccupato. In quell'anno, però, pubblicò il suo primo articolo di ricerca, uno studio delle forze che agiscono tra le molecole. Poco dopo ottenne la cittadinanza svizzera, che avrebbe conservato tutta la vita, anche dopo il trasferimento in America.

Per tutto il corso del 1901 Albert continuò la sua affannosa ricerca di una posizione accademica, spedendo lettere e copie del suo lavoro ovunque ci fosse un posto disponibile. Per disperazione, accettò una supplenza temporanea in una scuola superiore, dove con somma sorpresa si accorse che insegnare gli piaceva, oltre a lasciargli molto tempo libero per le sue ricerche. Come scrisse all'amico Marcel Grossmann, in quel periodo stava lavorando alla teoria dei gas e, nuovamente, al problema del moto attraverso l'etere. Nel frattempo si trasferí in una nuova scuola per un'altra supplenza.

Fu proprio Grossman a correre in aiuto dell'amico: convinse suo padre a raccomandare Einstein presso il direttore dell'Ufficio federale dei brevetti, a Berna. Quando uscí il bando di concorso per un posto di tecnico, fece domanda e contemporaneamente rassegnò le dimissioni dalla scuola, trasferendosi poi a Berna all'inizio del 1902, anche se nessuno gli aveva comunicato ufficialmente che aveva ottenuto il posto. Forse era troppo sicuro di sé, o magari aveva avuto delle rassicurazioni ufficiose. La nomina fu ufficializzata a giugno. Non era certo il lavoro dei suoi sogni, ma lo stipendio di 3500 franchi all'anno gli permetteva di vestirsi, sfamarsi e avere un tetto sopra la testa. E soprattutto, l'impiego gli lasciava abbastanza tempo per la fisica.

Al Politecnico aveva conosciuto una giovane compagna di studi, Mileva Marić, anche lei molto interessata alla scienza – e ad Albert. Sbocciò l'amore, purtroppo osteggiato dalla madre Pauline, il che creò tensione in famiglia. Poi Hermann si ammalò gravemente al cuore. Sul letto di morte acconsentí finalmente al matrimonio; poi però chiese a tutti di uscire dalla stanza, perché voleva morire da solo. Dopo questa triste vicenda, Einstein si portò dietro per sempre un senso di colpa.

Il matrimonio si celebrò nel gennaio 1903; l'unico figlio, Hans Albert, nacque nel maggio 1904.

Il lavoro all'Ufficio brevetti si rivelò perfetto per Albert, che svolse i suoi compiti in modo coscienzioso, tanto da essere assunto a tempo indeterminato alla fine del 1904. Il suo capo gli disse, però, che se voleva una promozione doveva imparare qualcosa di piú sulla tecnologia delle macchine. Nel frattempo il suo lavoro parallelo in fisica avanzava anche nel campo della meccanica statistica.

E arriviamo cosí all'*annus mirabilis*, il 1905, in cui l'impiegato dell'Ufficio brevetti scrisse un articolo che gli avrebbe fruttato il premio Nobel. Quell'anno ottenne anche il dottorato all'Università di Zurigo e fu promosso a perito di seconda classe, con un aumento di 1000 franchi l'anno (evidentemente doveva aver imparato qualcosa sulla tecnologia delle macchine).

Anche dopo l'ascesa nell'olimpo della scienza, Einstein ricordò sempre che era stato Grossmann a trovargli il lavoro perfetto all'Ufficio brevetti, che piú di ogni altra cosa gli aveva consentito di continuare le sue ricerche. Era stato un colpo di genio da parte dell'amico, per il quale gli sarebbe stato sempre riconoscente.

Nell'anno forse piú importante nella storia della fisica, Einstein pubblicò tre fondamentali lavori di ricerca.

Uno riguardava il *moto browniano*, cioè il moto casuale di minuscole particelle in sospensione in un fluido, cosí chiamato in onore del suo scopritore, il botanico Robert Brown. Nel 1827, osservando al microscopio dei grani di polline che galleggiavano sull'acqua, si accorse dell'esistenza di particelle ancora piú piccole che si agitavano freneticamente in tutte le direzioni. Il modello matematico di questi moti era stato ricavato da Thorvald Thiele nel 1880 e poi, indipendentemente, da Louis Bachelier nel 1900. È curioso notare che Bachelier arrivò alla stessa teoria di Thiele partendo da un fenomeno del tutto diverso: le oscillazioni casuali della borsa valori.

La spiegazione fisica, invece, ancora mancava. Einstein, e in modo indipendente anche il polacco Marian Smoluchowski, si resero conto che il moto browniano era una prova a favore dell'ancora dubbia teoria atomica. Secondo la cosiddetta «teoria cinetica», le molecole nei gas e nei fluidi sbattono continuamente l'una contro l'altra, seguendo come risultato delle traiettorie casuali a tutti gli effetti. Einstein riuscí a formalizzare questa ipotesi in modo da dimostrare che si accordava con le osservazioni sperimentali del moto browniano.

Il secondo articolo era dedicato all'effetto fotoelettrico. Scienziati come Alexandre Becquerel, Willoughby Smith, Heinrich Hertz e molti altri avevano verificato in laboratorio che in certi metalli si produce una corrente elettrica quando vengono colpiti dalla luce. Einstein prese come punto di partenza l'ipotesi dei quanti di Planck (ci torneremo dopo), cioè la modellizzazione della luce come insieme di tanti piccoli pacchettini. Grazie ai suoi calcoli si vide che questa ipotesi era un'eccellente spiegazione dei dati sperimentali, ed era dunque una delle prime prove fondate a favore della teoria quantistica.

Due risultati di capitale importanza, che però sono surclassati dal terzo. Nell'ultimo articolo di quell'anno, infatti, Einstein presentò la teoria della relatività, che di lí a poco avrebbe superato quella di Newton e cambiato il modo di concepire lo spazio, il tempo e la materia.

Il nostro concetto naturale di spazio è identico a quello di Euclide e di Newton. Ci sono tre dimensioni, che corrispondono a tre possibili direzioni perpendicolari tra loro, come ad esempio l'angolo di una casa, da cui posso spostarmi a destra, a sinistra o in alto. La struttura dello spazio è identica ovunque, anche se la materia che lo occupa varia da luogo a luogo. Gli oggetti nello spazio si possono spostare in vari modi: con rotazioni, riflessioni speculari o traslazioni (cioè scivolamenti di lato senza rotazione). Passando a un livello piú astratto, possiamo concepire queste operazioni come trasformazioni dello spazio stesso, cambiamenti del «sistema di riferimento». Ovviamente, le azioni qui descritte sono simmetrie, sia per la struttura spaziale sia per le leggi della fisica che vi operano: in altre parole, le leggi sono uguali in qualsiasi punto dello spazio e del tempo.

Nella concezione newtoniana, il tempo è un'altra dimensione, indipendente dalle tre spaziali. È lineare, e dunque le sue trasformazioni simmetriche sono molto piú semplici: traslazioni (cioè aggiungere un intervallo di tempo fissato a tutte le osservazioni) e riflessioni (ovvero portare indietro il tempo, ovviamente solo in teoria – è un cosiddetto esperimento mentale). Le leggi fisiche non dipendono dal punto di inizio delle misurazioni, dunque sono simmetriche rispetto a traslazioni nel tempo. E quasi tutte le leggi sono anche simmetriche per inversione temporale; non tutte però, il che è assai misterioso.

Ma quando matematici e fisici iniziarono a lavorare all'interno della nuova teoria elettromagnetica, si accorsero con stupore che il metodo newtoniano sembrava non funzionare. Le trasformazioni spaziali e temporali che lasciavano immutate le leggi non erano i semplici moti visti sopra, traslazioni, rotazioni e riflessioni; inoltre, questi non si potevano applicare indipendentemente nello spazio e nel tempo: un cambiamento di posizione ma non di intervallo, ad esempio, portava scompiglio nelle equazioni. Bisognava in qualche modo compensare la trasformazione spaziale con una temporale.

Il problema non si presentava sempre, perché bastava che il sistema osservato stesse fermo e tutto funzionava come prima. Ma le equazioni relative a una particella carica in movimento, come l'elettrone, davano molti grattacapi; e la dinamica dei corpi elettrici era un argomento cruciale a fine Ottocento. I problemi relativi alle simmetrie non si potevano ignorare.

Prima del 1905 un certo numero di ricercatori si era interrogato su questa bizzarra proprietà delle equazioni di Maxwell. Come cambiano i risultati se si esegue lo stesso esperimento relativo al campo elettromagnetico in un laboratorio o su un treno in corsa?

Certo, pochi scienziati fanno esperimenti sui treni; tutti però lavorano su un oggetto in movimento: il pianeta Terra. Sotto molti punti di vista il sistema di riferimento terrestre può essere considerato fermo, perché tutti gli apparati sperimentali e gli sperimentatori si muovono insieme a lui. A questo proposito, le leggi di Newton valgono in tutti i sistemi *inerziali*, cioè in quelli fermi o in moto rettilineo uniforme. La velocità terrestre è praticamente costante, ma il suo moto non è certo rettilineo, visto che gira attorno al proprio asse e attorno al Sole; eppure la traiettoria del laboratorio è approssimabile a una linea retta (la curvatura può influenzare il risultato in alcuni specifici esperimenti, comunque).

Nessuno si sarebbe preoccupato troppo se le equazioni di Maxwell avessero assunto una forma diversa per sistemi di riferimento rotanti, non inerziali. Ma la realtà era molto piú inquietante: erano diverse anche da un sistema inerziale all'altro. L'elettromagnetismo dei treni in corsa è diverso da quello dei laboratori, anche quando i primi viaggiano su binari perfettamente rettilinei e a velocità costante.

C'era un'ulteriore complicazione: cosa significa «in movimento»? Va bene dire che il treno si muove e i binari sono fermi, ma rispetto a che cosa? Il moto è un concetto relativo. Noi, ad esempio, non ci accorgiamo che la Terra gira, ma lo deduciamo dalle albe e dai tramonti; in realtà però non «sentiamo» in noi la rotazione.

Vi sarà capitato, se siete seduti in un treno e guardate fuori dal finestrino, di avere a volte la sensazione di stare fermi mentre il paesaggio sfreccia davanti a voi. Un amico seduto su un prato che vi vede passare ha sicuramente la sensazione opposta. Quando diciamo che la Terra gira attorno al Sole e non viceversa, in realtà affermiamo una cosa imprecisa, perché entrambe le descrizioni del moto sono valide, a seconda del punto di vista. Se il sistema di riferimento è solidale con il Sole, la Terra si muove e il nostro astro sta fermo; ma se il sistema è solidale con la Terra, come nel caso dei suoi abitanti, vale esattamente l'opposto.

Allora perché tutte quelle tragedie sulla teoria eliocentrica? Il povero Giordano Bruno fu bruciato sul rogo perché sosteneva che uno dei due punti di vista era giusto e l'altro, preferito dalla Chiesa di Roma, no. È forse morto per un qui pro quo?

Non proprio. C'era anche il problema di alcune sue affermazioni eretiche (bazzecole come la non esistenza di Dio) ed è quasi certo che il suo fato non sarebbe cambiato se non avesse sostenuto la teoria eliocentrica. Ma in effetti c'è un motivo, e anche profondo, per cui «la Terra gira attorno al Sole» è meglio di «il Sole gira attorno alla Terra»: la descrizione matematica dei moti dei pianeti è assai piú semplice nel primo caso che nel secondo. È possibile sviluppare una teoria geocentrica coerente, ma è davvero complicato. Qui la bellezza è piú significativa della pura verità: ci sono molti punti di vista sotto i quali osservare la natura, ma alcuni ci offrono piú opportunità di altri.

Bene, se il moto è sempre relativo, allora nulla è mai «fermo» in senso assoluto. La meccanica newtoniana si salva affermando che tutti i sistemi inerziali sono in pratica «a riposo». Nella teoria di Maxwell questo non è affatto vero.

Mentre il XIX secolo volgeva alla fine si fece strada un'altra interessante questione. Poiché allora si pensava che la luce fosse un'onda in movimento rispetto all'etere, quest'ultimo, forse, doveva essere sempre a riposo. Forse non tutti i moti erano relativi, forse l'etere sfuggiva alla regola e i moti rispetto a questo mezzo erano a tutti gli effetti *assoluti*. Ma tale ipotesi non spiegava ancora perché le equazioni di Maxwell non valessero in tutti i sistemi inerziali.

Dobbiamo pensare in termini di simmetria. Cambiare sistema di riferimento è un'operazione nello spazio e nel tempo. I sistemi inerziali sono simmetrici per traslazioni, quindi affermare che le leggi di Newton non cambiano è equivalente a dire che sono simmetriche per l'azione di una traslazione a velocità costante. Per qualche misterioso motivo, le leggi di Maxwell non possiedono questa proprietà. Forse qualche sistema inerziale è «piú inerziale» degli altri; se è vero, sicuramente deve trattarsi di quelli stazionari rispetto all'etere.

Il problema si riduceva quindi a due domande, una fisica e una matematica: è possibile rivelare in laboratorio il moto relativo all'etere? e quali sono le simmetrie delle equazioni di Maxwell?

La risposta al primo quesito fu trovata da due americani: Albert Michelson, un ufficiale della Marina che si era preso un periodo di congedo per studiare fisica con Helmholtz, e il chimico Edward Morley. Insieme costruirono un dispositivo molto sensibile in grado di misurare piccole differenze nelle velocità di due fasci luminosi che si muovevano in direzioni diverse; e non trovarono niente. O la Terra era ferma rispetto all'etere, il che aveva poco senso visto il suo moto attorno al Sole, oppure non c'era proprio nessun etere e la luce non obbediva alle consuete leggi del moto relativo.

Einstein attaccò il problema dal fianco matematico. Nel suo articolo non fece menzione dell'esperimento di Michelson-Morley, anche se in seguito affermò che ne era a conoscenza e che aveva influenzato le sue idee. Invece di rivolgere lo sguardo ai dati sperimentali, si mise a calcolare le simmetrie delle equazioni di Maxwell, di cui capí subito la peculiarità: erano mischiate nello spazio e nel tempo (l'articolo originale utilizza un diverso punto di vista, ma le considerazioni sulla simmetria sono visibili appena sotto la superficie). Conseguenza di questa strana caratteristica è che il moto uniforme rispetto all'etere, ammesso e non concesso che questa entità esista davvero, non può essere osservato.

La teoria einsteiniana acquistò presto il nome di «relatività», perché giungeva a risultati sorprendenti nel campo dei moti relativi nei fenomeni elettromagnetici.

Termine davvero inappropriato e fuorviante, perché il punto centrale delle idee di Einstein è proprio l'esistenza di fenomeni *non* relativi, nello specifico la velocità della luce. Un osservatore fermo in un campo e uno seduto su un treno in corsa, se richiesti di misurare la velocità di un fascio luminoso che passa lí accanto, trovano entrambi lo stesso valore.

È un'affermazione decisamente controintuitiva, che a prima vista sembra anche assurda. La luce viaggia a circa 300000 chilometri al secondo, ed è questo il valore che misurerà l'osservatore nel campo. E quello sul treno? Supponiamo che viaggi a 100 km/h. Immaginiamo adesso che su un binario parallelo stia transitando un altro treno alla stessa velocità. Il nostro uomo guarda fuori dal finestrino e cosa vede?

Se i due convogli hanno la stessa direzione, vede un treno fermo, perché le due velocità si annullano. Se invece le direzioni sono opposte, vedrà sfrecciare un bolide a 200 km/h, perché in quel caso le velocità si sommano.

Con i treni funziona tutto perfettamente: teoria ed esperimento collimano. Ora mettiamo al posto del secondo treno un fascio luminoso, che viaggia dunque a 1079252850 km/h. Ripetendo il ragionamento appena fatto, se il fascio si muovesse nella stessa direzione del primo treno l'osservatore dovrebbe misurare una velocità di (1079252850 – – 100) = 1079252750 km/h; se invece la luce gli venisse incontro, analogamente la velocità misurata dovrebbe essere (1079252850 + 100) = = 1079252950 km/h.

Secondo Einstein queste cifre sono sbagliate: in entrambi i casi, l'osservatore sul treno misurerà il valore di 1079252850 km/h, esattamente come quello trovato dall'uomo fermo nel campo.

Sembra semplicemente folle. Se le regole newtoniane per la composizione delle velocità valgono per due treni, perché non anche per la luce? Perché, secondo Einstein, per gli oggetti molto, molto veloci le leggi della fisica non sono piú quelle classiche.

Anzi, per la precisione: le leggi della fisica non sono quelle di Newton, punto e basta. Ma la differenza tra le due versioni diventa apprezzabile solo nel caso di corpi che si spostano a velocità prossime a quelle della luce. A cento all'ora, come nel caso dei due treni, la fisica classica è un'eccellente *approssimazione* di quella einsteiniana, tanto che la differenza è quasi impossile da notare. Ma al crescere della velocità, crescono anche le discrepanze.

Il punto principale della questione è che le simmetrie delle equazioni di Maxwell prevedono sempre una costante: la velocità della luce, appunto. Anzi, per come sono costruite, questo valore è in un certo senso murato dentro la struttura. Ecco perché deve essere assoluto.

È davvero paradossale che una teoria del genere sia chiamata «relatività». Einstein voleva battezzarla *Invariantentheorie*, cioè l'esatto opposto. Ma il nome piú comune cominciò a circolare, e poi c'era già una branca della matematica chiamata teoria degli invarianti, il che avrebbe potuto creare confusione. Certo, mai quanto parlare di relatività per una teoria che predice l'assolutezza.

Le conseguenze della relatività sono davvero bizzarre. Tanto per cominciare, la velocità della luce è un valore limite che non può essere superato in nessun modo: no dunque ai viaggi nell'iperspazio di *Star Trek*. Avvicinandosi a questo limite le lunghezze si accorciano e il tempo rallenta, e la massa cresce all'infinito. Ma, e questo è l'aspetto piú incredibile, un ipotetico viaggiatore non se ne accorgerebbe, perché i suoi strumenti di misura si modificherebbero allo stesso modo: righelli che si accorciano, orologi che rallentano ecc. Ecco perché gli osservatori sul treno e nel campo trovano la stessa velocità: perché i rispettivi cambiamenti nei tempi e nelle lunghezze si compensano a vicenda, annullando gli effetti attesi della somma e differenza di velocità. Ecco anche perché Michelson e Morley non trovarono nessun moto relativo della Terra rispetto all'etere.

Se vi spostate con moto uniforme, tutto ciò che vi circonda vi sembra uguale a com'è quando siete fermi. Le leggi della fisica non vi consentono di stabilire (senza riferimenti esterni) se siete in quiete o in moto rettilineo con velocità costante, ma solo se state accelerando.

Sembra tutto molto stravagante, ma vari esperimenti hanno confermato la teoria nel minimo dettaglio. Un'altra conseguenza della relatività è la celebre formula $E = mc^2$, che collega la massa all'energia e che (anche se la sua importanza è stata a volte esagerata) ha portato per vie traverse alla costruzione della prima bomba atomica.

La luce ci è cosí familiare che non ci fermiamo mai a riflettere sulle sue stranezze. Sembra non avere peso, penetra ogni cosa e ci permette di vedere il mondo. E di cos'è fatta? Onde elettromagnetiche. Onde che si propagano come? Nel continuum spaziotemporale, che è un modo chic per dire «non ne abbiamo idea». Fino agli inizi del XX secolo si pensava esistesse un mezzo di trasmissione di queste onde, l'etere luminifero, ma dopo l'arrivo di Einstein possiamo essere sicuri che non esiste. Le onde non sono *dentro* a qualcosa.

Come vedremo, la meccanica quantistica si spingerà ancora piú in là, sostenendo che in realtà *tutto è un'onda*. Anche un ipotetico mezzo di propagazione, un tessuto spaziotemporale che s'increspa al loro passaggio, è fatto a sua volta di onde.

Einstein non fu l'unico ad accorgersi che le simmetrie dello spaziotempo rivelate dalle equazioni di Maxwell non erano quelle canoniche newtoniane. Dal punto di vista classico, spazio e tempo sono entità ben distinte e separate; le simmetrie delle leggi fisiche sono combinazioni di moti rigidi nello spazio e spostamenti, del tutto indipendenti, sulla retta temporale. Ma, come abbiamo già detto, trasformazioni di questo tipo non lasciano immutate le leggi dell'elettromagnetismo.

Due grandi scienziati come Henri Poincaré e Hermann Minkowski, rimuginando su questo fatto, approdarono a una nuova descrizione delle simmetrie spaziotemporali, svolta con strumenti puramente matematici. Se ne avessero dedotto anche il significato fisico avrebbero battuto sul tempo Einstein e sarebbero passati alla storia come padri della relatività, ma entrambi evitavano di addentrarsi in quel campo. L'oggetto matematico che riflette l'interdipendenza di tempo e spazio nella teoria dell'elettromagnetismo si chiama gruppo delle trasformazioni di Lorentz, in onore del fisico Hendrik Lorentz.

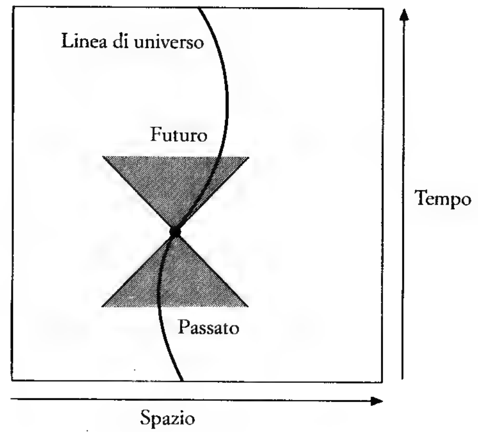
Per Minkowski e Poincaré questo gruppo era l'espressione astratta di alcune caratteristiche delle leggi fisiche, di cui espressioni come «dilatazione dei tempi» o «contrazione delle lunghezze» non erano che

vaghe approssimazioni. Invece Einstein era convinto che queste trasformazioni non avessero solo senso dal punto di vista matematico, ma anche da quello fisico. Gli oggetti e il tempo si comportano davvero cosí. Spinto da questa motivazione, formulò la teoria fisica che oggi chiamiamo *relatività ristretta*, in cui il gruppo delle trasformazioni di Lorentz veniva sfruttato per la descrizione di un nuovo ente, lo spaziotempo, che soppiantava le due realtà separate di spazio e tempo.

Minkowski sviluppò un modo per rappresentare geometricamente questa fisica non newtoniana, oggi detto appunto «spaziotempo di Minkowski». Lo spazio e il tempo sono due coordinate indipendenti e le particelle in moto descrivono in questo diagramma delle curve, dette *linee di universo*. Poiché niente può viaggiare piú veloce della luce, una linea di universo non può mai avere un'inclinazione rispetto all'asse verticale maggiore di 45°; dunque è costretta a rimanere dentro il doppio cono tratteggiato in figura 11.1, detto *cono di luce*, che delimita il suo passato e il suo futuro.

La relatività ristretta aveva dunque sistemato due delle forze fondamentali della natura, elettricità e magnetismo. Mancava all'appello,

Figura 11.1.
La geometria di Minkowski dello spaziotempo.



però, la gravità. Nel tentativo di presentare una teoria generale che comprendesse anche questa forza, sempre basata sul principio generale della simmetria delle leggi di natura, Einstein sarebbe approdato alla relatività generale, cioè all'idea che lo spaziotempo è incurvato e che la sua curvatura corrisponde alla massa. Da lí partirono una serie di deduzioni che avrebbero portato alla cosmologia contemporanea, all'ipotesi di un Big Bang avvenuto circa tredici miliardi di anni fa e a quel notevole oggetto che è un buco nero, tanto pesante da non lasciar scappare neppure la luce dal suo campo gravitazionale.

L'impianto teorico della relatività generale affonda le sue radici nei primi lavori sulle geometrie non euclidee, che portarono Gauss a introdurre il concetto di *metrica*, cioè un modo di definire la distanza tra due punti. Usando una formula diversa da quella solita, derivata dal teorema di Pitagora, si può dar vita a nuove geometrie: basta che la formula in questione soddisfi certi semplici requisiti che la rendano una distanza sensata. Il primo è la cosiddetta «disuguaglianza triangolare», cosí chiamata perché generalizza il teorema euclideo per cui ogni lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due. L'idea è semplice: presi tre punti qualunque A, B e C, la distanza del tragitto da A a C deve essere minore di quella lungo il percorso piú complicato da A a B e poi da B a C.

Il teorema di Pitagora vale nello spazio euclideo, che è «piatto». Dunque quando la metrica è diversa possiamo attribuire la differenza a una qualche «curvatura». In genere la si visualizza mentalmente come una piega nello spazio, ma in realtà si tratta di un'immagine imprecisa, perché necessita di un altro spazio piú grande in cui accorgersi della piega (ad esempio la curvatura di una sfera «vista da fuori»). Il modo migliore per capire il concetto è pensare a varie regioni dello spazio di volta in volta compresse o dilatate, tanto che sembrano piú grandi dentro che fuori, o viceversa. Riemann, il geniale studente di Gauss, estese il concetto di metrica da due dimensioni al caso generale e modificò la definizione in modo da poter lavorare localmente, cioè definire la distanza solo per punti in qualche modo «vicini». Un oggetto dotato di una simile geometria si chiama varietà riemanniana ed è l'esempio piú generale di «spazio curvo».

Le leggi fisiche non valgono nello spazio, ma nello spaziotempo, un luogo la cui geometria naturale, secondo Einstein, non è quella euclidea ma quella di Minkowski. La formula per la distanza in questa geometria comprende anche il tempo; ne risulta uno spaziotempo «incurvato» che, come vedremo, serve benissimo allo scopo.

Einstein incontrò molte difficoltà prima di arrivare a una teoria compiuta della relatività generale. Il suo punto di partenza fu un esame del moto della luce in presenza di un campo gravitazionale, il che lo condusse a formulare una linea guida che l'avrebbe accompagnato in tutte le ricerche successive: il *principio di equivalenza*. Nella meccanica classica la gravità è una forza, grazie alla quale i corpi massicci si attraggono. La forza è la causa dell'accelerazione. Ebbene, il principio di equivalenza afferma che un osservatore senza contatto con l'esterno non riesce a distinguere un'accelerazione dall'azione di un opportuno campo gravitazionale. In altre parole, per far rientrare la gravità nell'ambito relativistico bisogna studiare le accelerazioni.

Verso il 1912 Einstein si era convinto che una teoria gravitazionale non avrebbe potuto essere simmetrica per le trasformazioni di Lorentz, che si applicavano esattamente e in ogni punto solo in assenza di materia e gravità, e quando lo spaziotempo era quello di Minkowski. Abbandonando la pretesa che le sue equazioni fossero invarianti per l'azione del gruppo di Lorentz si risparmiò molto lavoro inutile. Scriverà poi nel 1950: «L'unica cosa a cui credevo fermamente era che dovevo in qualche modo far entrare il principio di equivalenza nelle equazioni fondamentali della teoria». Sapeva, però, che il principio avrebbe dovuto valere solo a scala locale, come una sorta di approssimazione infinitesima della verità.

Nel 1907 l'amico Marcel Grossman, che era diventato professore di geometria al Politecnico di Zurigo, convinse Einstein ad accettare un posto nello stesso ateneo. Non ci rimase molto, visto che un anno dopo già partiva per Berlino, da cui si sarebbe poi trasferito per approdare a Praga. Nel frattempo mantenne stretti contatti con Grossmann, mossa che si sarebbe rivelata azzeccata. Nel 1912, infatti, l'amico lo aiutò a trovare il tipo di matematica che stava cercando:

> Tale problema rimase insolubile per me fino al 1912, quando all'improvviso mi resi conto che la teoria di Gauss delle superfici forniva la chiave per svelare

questo mistero [...] Non sapevo però a quell'epoca che Riemann aveva studiato i fondamenti della geometria in maniera ancora piú profonda [...] Quando da Praga tornai a Zurigo vi trovai il matematico Grossmann, mio caro amico: da lui appresi le prime notizie sul lavoro di Ricci e in seguito su quello di Riemann. Cosí gli domandai se il mio problema potesse essere risolto con la teoria di Riemann[4].

Il Ricci qui citato è Gregorio Ricci-Curbastro, inventore insieme con il suo studente Tullio Levi-Civita del calcolo differenziale sulle varietà. Il cosiddetto «tensore di Ricci» è una misura della curvatura piú semplice di quella proposta originariamente da Riemann.

Secondo un'altra fonte, Einstein aveva pregato Grossmann di aiutarlo, altrimenti sarebbe impazzito. Comunque sia, il ruolo dell'amico fu fondamentale: non solo gli risparmiò la lettura di una vasta e complessa serie di articoli matematici, ma lo aiutò concretamente a cercare le equazioni giuste. Nel 1913 uscí il primo frutto delle loro fatiche congiunte, un articolo che terminava con una congettura circa la forma definitiva delle equazioni di campo: una cosa chiamata tensore energia-impulso doveva essere proporzionale a... qualcosa.

Eh già, non ne avevano idea. Sapevano solo che doveva essere un altro tensore, un'altra misura della curvatura.

A quel punto fecero entrambi una serie di errori che li portarono su una strada senza uscita. Erano convinti, a ragione, che dalla loro teoria generale si sarebbe dovuta derivare quella classica newtoniana come caso limite, cioè con spaziotempo piatto e piccoli valori della forza di gravità. Da questo vincolo se ne deducevano altri piú tecnici sulla natura del «qualcosa». Ma in realtà i loro ragionamenti erano errati e non approdarono a nulla.

Einstein credeva che le equazioni di campo corrette avrebbero dovuto portare a un'unica metrica, cioè alla formula appropriata per la distanza nello spaziotempo, che ne determina le proprietà geometriche. Ma questo è proprio sbagliato: un cambiamento del sistema di coordinate può modificare la formula, senza però riflettersi nella curvatura *intrinseca* dello spazio. Apparentemente, tutti e due ignoravano le cosiddette identità di Bianchi, grazie alle quali si capisce come stanno le cose.

Era la classica situazione da incubo dello scienziato: un'idea che pareva a prova di bomba sembrava portare nella direzione giusta, ma in realtà era solo un depistaggio. Accorgersi di errori del genere è quasi impossibile, proprio perché si è certi di essere nel giusto. Spesso non ci si rende nemmeno conto che il problema è causato da certe ipotesi implicite date per vere.

Verso la fine del 1914 Einstein capí finalmente che le equazioni di campo non potevano determinare la metrica in modo unico, per via della possibilità di cambiare coordinate, che non cambia la fisica ma solo la formula matematica della distanza. Continuava a ignorare le identità di Bianchi, ma ora non ne aveva piú bisogno, perché si era reso conto che avrebbe potuto scegliere le coordinate che gli parevano piú comode.

Il 18 novembre 1914 Einstein aprí un nuovo fronte d'attacco nella sua guerra di conquista delle equazioni di campo. Era arrivato abbastanza vicino al traguardo da poter fare previsioni verificabili, e ne fece due. Una in realtà era una spiegazione *ex post*: con la sua teoria riusciva a spiegare certe piccole discrepanze osservate nell'orbita di Mercurio, il cui perielio (il punto dell'orbita piú vicino al Sole) si stava spostando. Calcolò teoricamente la velocità di questo spostamento e trovò che i risultati si accordavano molto bene con i dati delle osservazioni.

La seconda invece era una vera previsione, che avrebbe richiesto una serie di osservazioni astronomiche per essere verificata o falsificata: ottima notizia, perché era il modo migliore per saggiare la bontà della teoria. Secondo la sua tesi, la gravità dovrebbe «piegare» la luce. La spiegazione di questo effetto è semplice e ha a che vedere con le geodetiche, cioè i cammini piú brevi tra due punti su una superficie curva. Se tenete un pezzo di corda teso tra le mani, questo forma un segmento dritto, perché nello spazio euclideo le geodetiche sono le rette. Ma se appoggiate la corda su un pallone e tirate gli estremi, senza farla sollevare dalla superficie, vi accorgete che si forma una curva. Lo stesso accade alle geodetiche dello spaziotempo, anche se i dettagli sono leggermente diversi.

Le circostanze reali in cui questo effetto si potrebbe manifestare sono facilmente spiegate. Una stella come il Sole dovrebbe essere in grado di piegare ogni fascio luminoso che le passi accanto; l'unica occasione per osservare dal vivo questo effetto, però, è durante un'eclissi, periodo in cui si riescono a vedere le stelle vicine al disco solare. Se Einstein fosse stato nel giusto si sarebbe dovuto osservare un piccolo spostamento nella posizione apparente di queste stelle, rispetto al momento in cui non sono allineate con il Sole.

L'analisi quantitativa del fenomeno, invece, era molto meno semplice. Nel suo primo tentativo del 1911 Einstein aveva ipotizzato uno scostamento di poco meno di un secondo d'arco, simile a quello che avrebbe predetto Newton, convinto com'era che la luce fosse fatta di corpuscoli e quindi soggetta alla forza di gravità. Ma nel 1915 nuovi calcoli l'avevano portato a un valore quasi doppio: 1,74 secondi d'arco.

Ora si prospettava la concreta opportunità di decidere chi avesse ragione tra Newton e Einstein. Il 25 novembre 1914 le equazioni di campo erano pronte nella forma definitiva. Oggi chiamate *equazioni di Einstein*, sono il fulcro della relatività generale, la teoria relativistica della gravità. Sono scritte con un formalismo matematico detto *tensore* (una sorta di supermatrice) e ci dicono che uno di questi oggetti, il tensore di Einstein, è proporzionale alla variazione di un altro, il tensore energia-impulso. Tradotto, ciò significa che la curvatura dello spaziotempo è proporzionale alla quantità di materia presente. Queste equazioni hanno proprietà di simmetria solo a livello locale: in piccole regioni dello spaziotempo hanno le stesse simmetrie della relatività ristretta, se si tiene conto della curvatura.

Einstein si accorse che i suoi calcoli sul moto del perielio di Mercurio e sulla deviazione della luce da parte di una stella non cambiavano anche dopo le piccole modifiche che aveva introdotto nell'ultima versione. Presentò la sua teoria all'Accademia prussiana ma lí scoprí con sorpresa che David Hilbert aveva già prodotto una serie di equazioni identiche, che però asseriva fossero valide sia per la gravità sia per l'elettromagnetismo, il che non era vero. È curioso come per due volte un grande matematico sia andato molto vicino a soffiare la gloria sotto il naso di Einstein.

Per verificare la previsione sulla deviazione della luce stellare furono organizzate varie spedizioni astronomiche a caccia di eclissi. La prima, in Brasile, fu rovinata dalla pioggia. Nel 1914 un'équipe tedesca si recò in Crimea ma fu sorpresa dallo scoppio della Prima guerra mondiale; qualcuno riuscí a scappare, qualcuno fu preso prigioniero ma alla fine tornarono tutti a casa sani e salvi – naturalmente senza uno straccio di osservazione. La guerra impedí anche di sfruttare l'eclissi venezuelana del 1916. Gli Americani ci provarono nel 1918 ma senza successo. Alla fine una spedizione britannica guidata da Arthur Eddington riuscí a compiere delle osservazioni valide a maggio 1919, ma non le rese pubbliche fino a novembre.

Il risultato finale fu a favore di Einstein e contro Newton: la deviazione c'era ed era troppo ampia per essere giustificata dal modello classico, mentre si accordava bene con quello relativistico.

Col senno di poi, possiamo dire che non si trattò di un verdetto cosí chiaro, perché gli errori sperimentali erano notevoli. Forse la conclusione piú onesta sarebbe stata affermare che Einstein aveva probabilmente ragione (osservazioni piú recenti che si sono avvalse di tecniche e strumenti piú sofisticati hanno però confermato le previsioni della teoria). All'epoca, però, venne presentato come definitivo e la stampa mondiale letteralmente impazzí. Un genio aveva dimostrato che Newton si sbagliava! Di sicuro un uomo in grado di concepire una teoria cosí nuova era il massimo scienziato vivente.

Cosí nacque la leggenda di Einstein e della sua incomprensibile teoria. Sentite cosa scriveva in quei giorni il «New York Times»:

> Questa è una notizia sconvolgente che farà sorgere dubbi persino sull'affidabilità della tavola pitagorica [...] Ci vorrebbero i presidenti di due Royal Societies per rendere plausibile o anche solo concepibile l'asserzione secondo cui, come la luce ha peso, cosí lo spazio ha confini. Semplicemente non è possibile, per definizione, e la cosa finisce lí [...] almeno per la gente comune, quale che possa essere l'opinione degli specialisti di alta matematica[5].

Ma gli «specialisti di alta matematica» avevano ragione. Presto i giornali avrebbero pubblicato la storiella secondo la quale solo dodici persone al mondo erano in grado di comprendere la teoria dell'«improvvisamente famoso dottor Einstein», una leggenda che è circolata per anni, anche in epoche in cui migliaia di studenti universitari la affrontavano senza particolari problemi nei loro corsi.

Nel 1920 Grossmann mostrò i primi sintomi di sclerosi multipla. Scrisse il suo ultimo articolo di ricerca nel 1930 e morí sei anni dopo. Einstein, nel frattempo, diventava sempre piú l'icona della fisica contemporanea e sembrava godere della popolarità mediatica. Piú avanti negli anni avrebbe imparato a gestire, in modo anche divertito, la sua fama.

Ma adesso dobbiamo voltare pagina, non prima di aver sottolineato che dopo il 1920 egli diresse i suoi sforzi nel tentativo vano di trovare una «teoria unificata di campo» che unisse la relatività e la meccanica quantistica. Stava lavorando a questo problema anche il giorno prima della sua morte, nel 1955.

[1] Pais 1982.
[2] I. Newton, *Ottica* (1730[4]), in *Scritti di ottica*, a cura di A. Pala, Utet, Torino 1978, p. 558 [*N. d. T*].
[3] *Ibid*,. p. 562 [*N. d. T*].
[4] Citato in Pais 1982, trad. it. p. 231 [*N. d. T.*].
[5] *Ibid.*, p. 331 [*N. d. T.*].

Capitolo dodicesimo
Quintetto quantico

«Tutto è stato già scoperto, o quasi. Quel che resta da fare è chiarire qualche dettaglio». Non era un'affermazione incoraggiante per un giovane di talento intenzionato a intraprendere la carriera del ricercatore, soprattutto se a pronunciarla era un cattedratico come il tedesco Philipp von Jolly.

La frase incriminata risale al 1874, epoca in cui gran parte dei fisici la pensava allo stesso modo. Qualche anno piú tardi, nel 1900, un luminare come Lord Kelvin sembrava non avere dubbi: «In fisica oggi non c'è piú nulla di nuovo da scoprire. Dobbiamo solo ottenere misure sempre piú precise».

D'accordo, Kelvin è passato alla storia anche per frasi memorabili come: «Posso affermare con certezza che far volare una macchina piú pesante dell'aria è fisicamente impossibile» e «Spedire un uomo sulla Luna è un'impresa che pone enormi problemi, tanto che credo ci vorranno ancora duecento anni prima che la scienza arrivi a compierla». Di lui è stato scritto che passò la prima parte della carriera ad avere sempre ragione e la seconda ad avere sempre torto.

Ma in questo caso l'aveva in parte azzeccata. Nella sua conferenza del 1900, il cui titolo tradotto era «Nubi del XIX secolo sulla teoria dinamica della luce e del calore», indicava infatti due problemi davvero cruciali per l'epoca, che sbarravano la strada a una piena comprensione del mondo fisico: «L'eleganza e la semplicità della teoria dinamica, secondo la quale luce e calore sono modalità del moto, sono oggi minacciate da due nubi. La prima è relativa all'etere lumifero: come è possibile che la Terra si muova attraverso un mezzo che è sostanzialmente un solido elastico? La seconda è la teoria di Maxwell-Boltzmann della partizione dell'energia». Due nuvole che avrebbero portato, rispettivamente, alla relatività e alla meccanica quantistica.

Tornando a von Jolly, il giovane a cui era diretta la raggelante frase di cui sopra, per fortuna, non si scoraggiò. Non voleva scoprire cose nuove, disse al professore, ma solo studiare in modo piú approfondito i concetti fondamentali della fisica. Non poteva sapere che nel corso delle sue ricerche avrebbe dato inizio a una delle due grandi rivoluzioni della fisica del Novecento, che avrebbe spazzato via la seconda nube di Kelvin. Il giovane in questione si chiamava Max Planck.

Suo padre Julius Wilhelm Planck era professore alla facoltà di legge di Kiel, figlio di due teologi e fratello di un giudice. Il 23 aprile 1858 la seconda moglie Emma Patzig diede alla luce il sesto figlio, Max Karl Ernst Ludwig Planck, che viste le premesse sarebbe certamente cresciuto in un ambiente stimolante dal punto di vista intellettuale. Tanto per cambiare, il piccolo Max nacque in un'epoca di incertezza e scontri in Europa; uno dei suoi primi ricordi era legato all'ingresso delle truppe austro-prussiane a Kiel nel 1864, durante la guerra tra Danimarca e Prussia.

Nel 1867 la famiglia si trasferí a Monaco. Max si iscrisse alla Kaiser-Maximilian Schule, dove il suo insegnante Hermann Müller gli trasmise molte nozioni di matematica, astronomia, meccanica e fisica di base, tra cui la legge della conservazione dell'energia. Era un ottimo studente e si diplomò a soli sedici anni.

I suoi talenti non erano limitati alla scienza: era infatti anche un bravo musicista. Decise però di dedicarsi alla fisica, nonostante l'opinione non proprio incoraggiante di von Jolly, suo professore di fisica sperimentale. Presto però si accorse che preferiva la parte teorica della disciplina. Nel 1877 si trasferí a Berlino, dove allora si trovavano i migliori matematici e fisici del mondo; lí ebbe l'opportunità di studiare con von Helmholtz, Kirchhoff e Weierstrass. Si laureò nel 1878 e ottenne il dottorato l'anno seguente, con una tesi sulla termodinamica. Dopo aver insegnato per qualche tempo matematica e fisica nella sua vecchia scuola superiore, nel 1880 sostenne l'esame per la libera docenza difendendo una tesi sull'equilibrio termico di corpi a diverse temperature. Passarono altri cinque anni prima che un'università, quella di Kiel, gli offrisse un posto come associato. Una volta nominato professore, concentrò le sue ricerche soprattutto nel campo della termodinamica, in special modo sull'entropia.

Nel 1887 sposò Marie Merck, sorella di un amico, da cui avrebbe avuto quattro figli: nell'ordine Karl, le gemelle Emma e Grete, ed Erwin.

L'anno in cui nacquero le gemelle, il 1889, fu anche quello della sua nomina a Berlino, alla cattedra che era stata di Kirchhoff. Tre anni dopo divenne professore ordinario. La famiglia si trasferí nella capitale, in una bella villa del Grunewald dove già abitavano molti altri membri del mondo accademico. Tra questi c'era il teologo Adolf von Harnack, che divenne un amico di famiglia.

I Planck amavano ricevere e la loro casa divenne meta di celebri intellettuali, tra cui Einstein, Otto Hahn e Lise Meitner, che avrebbero poi fatto scoperte fondamentali sulla fissione nucleare, avviando l'umanità sulla lunga e tortuosa strada verso la bomba atomica e le centrali nucleari. Durante queste serate mondane Planck intratteneva gli ospiti suonando, come già aveva fatto il suo maestro von Helmholtz.

Tutto sembrava andare per il meglio, quando all'improvviso Marie si scoprí affetta da una malattia polmonare (forse la tubercolosi). Morí nel 1909. Un anno e mezzo dopo Planck, allora cinquantaduenne, si risposò con Marga von Hoesslin, da cui ebbe il terzo figlio maschio, Hermann.

Nel 1894 Planck fu ingaggiato per una consulenza da una società elettrica tedesca, che stava cercando di produrre una lampadina dal rendimento energetico migliore. Dal punto di vista teorico era un problema abbastanza standard, cosiddetto della «radiazione di corpo nero»; si trattava di studiare l'emissione di luce da parte di un corpo nero, cioè un oggetto che assorbe integralmente le radiazioni che lo colpiscono, senza rifletterle. Un tale oggetto, se riscaldato, emette luce a tutte le frequenze, la cui intensità, o in modo equivalente l'energia, varia al variare delle frequenze stesse. Ci si chiedeva allora, ed era la domanda rilevante per il problema dell'efficienza delle lampadine, quale fosse la relazione specifica tra queste due quantità, frequenza ed energia.

Al proposito erano a disposizione dati sperimentali affidabili e una descrizione teorica, la legge di Raleigh-Jeans, derivata dai principî della fisica classica. Putroppo la legge si accordava bene con l'esperienza alle basse frequenze, ma molto male a quelle alte, anzi: con l'aumentare della frequenza faceva tendere l'energia all'infinito, un problema allora noto come «catastrofe ultravioletta». Altri esperimenti piú recenti avevano portato a una correzione della formula teorica, la legge di Wien (dal suo scopritore Wilhelm Wien). Ma anche qui c'era un problema: al contrario della precedente, andava bene per le frequenze alte ma non per quelle basse.

Dunque c'erano due formule diverse che funzionavano in diversi ambiti. A Planck venne l'idea di provare a interpolare tra le due, cioè a ricavare un'espressione matematica che approssimasse la legge di Raleigh-Jeans alle basse frequenze e quella di Wien alle alte. Ci riuscí e il risultato è oggi noto come legge di Planck per la radiazione di corpo nero.

Questa nuova formula era stata esplicitamente studiata per accordarsi alla perfezione con i dati sperimentali, attraverso l'intero spettro della radiazione elettromagnetica, ed era quindi puramente empirica, cioè non derivava da alcun principio fisico di fondo. Lo stesso Planck, votato fin dalla gioventú alla comprensione piú profonda dei fenomeni, ne era insoddisfatto; si mise quindi con grande impegno alla ricerca di un'idea piú generale da cui far discendere la sua legge.

La svolta avvenne nel 1900. Planck si accorse di una curiosa proprietà della sua formula: poteva essere derivata quasi allo stesso modo di quella di Raleigh-Jeans, con un piccolo cambiamento. In fisica classica si dava per scontato che l'energia della radiazione elettromagnetica potesse assumere uno spettro continuo di valori, in particolare essere piccolo a piacere. Ma era proprio questo tacito assunto a causare la catastrofe ultravioletta; sarebbe bastato cambiare qualcosa nelle ipotesi di partenza per far sparire quel noioso valore infinito dai calcoli.

Il cambiamento, però, era di quelli rivoluzionari. L'energia della radiazione di ogni frequenza data poteva assumere solo certi valori specifici, pari a multipli interi di una quantità base, un «pacchetto» minimo di energia; inoltre, la grandezza dell'energia doveva essere direttamente proporzionale alla frequenza, cioè essere pari alla frequenza moltiplicata per una costante, che oggi chiamiamo *costante di Planck* e denotiamo con la lettera *h*.

I «pacchetti» furono battezzati *quanti*. Planck aveva quantizzato la luce.

Interessante dal punto di vista teorico, ma perché il fenomeno non sembrava presentarsi nei dati sperimentali? Per un ottimo motivo: il pacchetto fondamentale era piccolissimo. Confrontando i suoi calcoli con i risultati delle esperienze, Planck riuscí a trovare il valore della sua costante, che risultò essere circa 6×10^{-34} joule-secondo. Detto in soldoni, per accorgersi del fatto che i valori energetici erano quantizzati e non continui, cioè per scoprire che l'energia assumeva sempre valori multipli interi di una certa quantità e non era mai pari ad altri valori ammessi dalla teoria classica, ci sarebbero volute misure precise fino alla trentaquattresima cifra decimale. Oggi arrivare a sei-sette cifre è un'impresa non sempre possibile, e all'epoca tre erano già un gran bel risultato. L'osservazione diretta del fenomeno era dunque semplicemente irrealizzabile.

Può sembrare strano che una differenza numerica cosí minuscola da non poter esser misurata abbia un effetto cosí radicale sulla formula della radiazione. Eppure è cosí. Il calcolo prevede infatti l'aggiunta di tutti i contributi all'energia totale provenienti da tutte le frequenze; l'effetto complessivo è dovuto a tutti i possibili quanti. Dalla Luna non si riesce a scorgere un granello di sabbia sulla Terra, ma si vede bene il Sahara: se molte, moltissime quantità microscopiche si sommano, il risultato può essere decisamente macroscopico.

Mentre la sua attività scientifica inanellava successi, la vita personale di Planck volgeva in tragedia: il figlio Karl morí nella Prima guerra mondiale, la figlia Grete morí di parto nel 1917 e la sua gemella Emma, che aveva sposato il vedovo, subí la stessa sorte nel 1919. Molti anni dopo l'altro figlio Erwin fu messo a morte nel 1944 per aver partecipato al complotto per assassinare Hitler.

A supporto della radicale proposta di Planck venne uno dei tre celebri articoli di Einstein del 1905, quello sull'effetto fotoelettrico, che, come ricorderete, riguarda la possibilità di convertire la luce in elettricità. All'epoca già si sapeva che l'elettricità era una quantità discreta, dovuta al moto di particelle microscopiche dette elettroni. Grazie alla sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico, Einstein dedusse che lo stesso doveva valere per la luce, il che non soltanto corroborava le idee di Planck, ma forniva una spiegazione sulla natura dei quanti: anche le onde luminose, come gli elettroni, dovevano essere particelle.

E come è possibile? Sembra strano, eppure i risultati sperimentali sembravano chiari. Presto si scoprirono queste «particelle luminose», a cui fu dato il nome di *fotoni*, che portarono alla visione quantistica del mondo: le particelle sono in realtà onde, e si comportano a volte in un modo e a volte nell'altro.

La comunità scientifica iniziò a prendere i quanti sul serio. Il grande fisico danese Niels Bohr propose un modello quantizzato dell'atomo, in cui gli elettroni si muovevano lungo orbite circolari attorno a un nucleo, a distanze determinate da livelli discreti di energia. Il francese Louis de Broglie portò il ragionamento a un altro livello: poiché i fotoni possono essere sia onde sia particelle, e poiché in certe circostanze un metallo colpito da fotoni emette elettroni, allora anche questi ultimi devono avere la stessa duplice natura. Anzi, tutta la materia deve essere fatta cosí, a volte particella e a volte onda. E gli esperimenti davano ragione a questa idea.

Nel mondo microscopico, termini come «onda» e «particella» hanno un potere descrittivo limitato. È necessario un nuovo linguaggio, un nuovo formalismo che tenga conto dell'esistenza di queste onde-particelle[1].

Il passo successivo è fondamentale per la nostra storia della simmetria. Un fisico di nome Erwin Schrödinger prese la formula di de Broglie, che forniva la lunghezza d'onda delle particelle, e la trasformò in un'equazione che descriveva il moto delle cosiddette *funzioni d'onda*: l'equazione di Schrödinger, che avrebbe svolto nella meccanica quantistica lo stesso ruolo delle leggi di Newton nella meccanica classica.

Schrödinger nacque a Vienna nel 1886, da genitori di diversa religione. Il padre Rudolf, cattolico, era un fabbricante di sudari di tela cerata, oltre che un botanico dilettante; la madre, Georgine Emilia Brenda, era luterana. Dal 1906 al 1910 Erwin studiò fisica all'università della sua città sotto la guida di Friedrich Hasenöhrl e Franz Exner, di cui divenne assistente nel 1911. Passò l'esame per la libera docenza nel 1914, proprio allo scoppio della Prima guerra mondiale, e fu arruolato nell'esercito austriaco, diventando ufficiale di artiglieria. Nel 1920 sposò Annemarie Bertel e ottenne un posto da professore associato a Stoccarda. L'anno dopo gli fu offerta una cattedra da ordinario a Breslavia (all'epoca in Germania, oggi Wrocław, in Polonia).

L'equazione che adesso porta il suo nome fu resa pubblica nel 1926,

in un articolo in cui Schrödinger dimostrava che grazie a essa si riuscivano a ricavare i livelli corretti di energia nello spettro dell'atomo d'idrogeno. Seguirono a breve distanza di tempo altri tre importanti lavori nell'ambito della meccanica quantistica. Nel 1927 divenne collega di Planck a Berlino, ma nel 1933, dopo la salita al potere dei nazisti, disgustato dall'antisemitismo, emigrò a Oxford, dove fu nominato *fellow* del Magdalen College. In quello stesso anno gli fu conferito il premio Nobel, in coabitazione con Paul Dirac.

Lo stile di vita di Schrödinger era un po' troppo eterodosso, tanto da creare scandalo nella puritana Oxford: viveva infatti con due donne contemporaneamente. Nel giro di un anno, scontento dell'ambiente, si trasferí a Princeton, dove gli fu offerto un posto da ordinario, che lui rifiutò, forse perché non aveva intenzione di lasciare né la moglie né l'amante, e la *pruderie* americana non pareva meno soffocante di quella inglese. Alla fine nel 1936 si stabilí a Graz, in Austria, dove decise di ignorare gli sguardi dei benpensanti.

L'annessione del Paese da parte della Germania nazista, avvenuta nel 1938, creò non pochi problemi a Schrödinger, noto antifascista. Fu costretto a ripudiare pubblicamente le sue idee (e in seguito si sarebbe scusato con Einstein per averlo fatto), ma questo non lo salvò dal licenziamento per motivi politici. Scappò allora in Italia e da lí con vari passaggi intermedi raggiunse Dublino, dove si stabilí.

Nel 1944 pubblicò il saggio *Che cos'è la vita?*, un affascinante ma impreciso tentativo di applicazione della meccanica quantistica alla biologia. La sua idea centrale era l'esistenza di una «entropia negativa», cioè la tendenza degli organismi viventi a violare, o in qualche modo aggirare, la seconda legge della termodinamica. Schrödinger era convinto che i geni dovessero essere molecole complesse in grado di contenere un gran numero di istruzioni in codice: oggi sappiamo che è proprio cosí e chiamiamo questa molecola DNA. Pare che la scoperta della sua struttura da parte di Francis Crick e James Watson, avvenuta nel 1953, fosse stata ispirata parzialmente dalle idee di Schrödinger.

L'Irlanda non gli fece mutare atteggiamento riguardo alla morale e alla sessualità; ebbe infatti relazioni con varie studentesse, due delle quali gli diedero due figli. Negli ultimi anni della sua vita tornò a Vienna, dove morí di tubercolosi nel 1961.

Schrödinger è soprattutto famoso per il suo gatto, un animale non in carne e ossa, ma protagonista di un esperimento mentale dagli esiti paradossali. In genere si pensa che questa sia una prova del fatto che le funzioni d'onda non esistono fisicamente nella realtà; sono solo comode ipotesi, non verificabili sperimentalmente ma comunque utili perché portano a predizioni corrette. Però non tutti la pensano cosí: se davvero le onde non ci sono, perché il mondo sembra funzionare come se esistessero?

Ma torniamo al gatto. Secondo la meccanica quantistica, le funzioni d'onda possono interferire tra loro come le normali onde sull'acqua, rafforzandosi e cancellandosi a seconda di come si incontrano le rispettive creste e i rispettivi ventri. Questo comportamento, detto *sovrapposizione*, nel caso delle funzioni d'onda implica che esse possono contenere molti stati potenziali, anche senza trovarsi chiaramente in uno solo. Secondo Bohr e la sua celebre *interpretazione di Copenaghen*, la natura è fatta proprio cosí: ogni quantità fisica è in uno stato di sovrapposizione, e solo quando la osserviamo la costringiamo, per cosí dire, a prendere posizione e a trovarsi in uno stato «puro».

Questa idea funzionava bene per gli elettroni, ma Schrödinger si chiese quali conseguenze avrebbe avuto sugli oggetti macroscopici. Immaginò quindi un gatto chiuso in una scatola con un meccanismo in grado di rilasciare cianuro, studiato in modo che ci fosse una sovrapposizione tra gli stati «gatto vivo» e «gatto morto». Solo aprendo la scatola si conosce il destino del gatto, che fino ad allora è contemporaneamente vivo e morto (come fa notare Pratchett in un capitolo della sua saga del Mondo Disco, *Maskerade*, se si esegue davvero l'esperimento il gatto ne esce in un terzo stato: assolutamente furibondo).

Schrödinger sapeva bene che il suo gatto non era un elettrone. Le particelle microscopiche si comportano come dice la meccanica quantistica e le loro proprietà come posizione, velocità e spin si possono descrivere in modo abbastanza semplice. Un gatto invece è un oggetto macroscopico e si comporta in tutt'altro modo: non esiste una sovrapposizione di stati felini (quando mia moglie e io cerchiamo di sovrapporre i nostri due gatti otteniamo in genere lotte furibonde e occhiatacce indignate da parte dei medesimi). La parola chiave è *decoerenza*, che è il fenomeno grazie al quale un oggetto visibile si comporta in modo familiare, secondo le leggi della fisica classica. Un gatto contiene moltissime funzioni d'onda, che tendono ad aggrovigliarsi tra loro e rovinare gli effetti della sovrapposizione, il tutto in un tempo inferiore a quello impiegato dalla luce per attraversare un elettrone. Quindi, grazie al numero immenso di particelle quantistiche che lo compongono, un gatto si comporta come un gatto: o è vivo, o è morto.

Eppure, a scale sufficientemente piccole (e stiamo parlando di lunghezze veramente minuscole, nulla che si possa vagamente vedere al microscopio), la natura fa proprio ciò che predice la meccanica quantistica ed è quindi in grado di essere due cose allo stesso tempo. Qui sta la vera rivoluzione.

A quali livelli di stranezze potesse arrivare la teoria quantistica fu chiaro dopo le ricerche di Werner Heisenberg, un fisico tanto brillante nella teoria quanto inetto in laboratorio. Durante la discussione della sua tesi di dottorato, ad esempio, fu messo in crisi da semplici domande sull'uso di telescopi e microscopi. Di sicuro non aveva idea di come funzionasse una batteria.

August Heisenberg sposò Anna Wecklein nel 1899; la donna era cattolica e si era dovuta convertire alla religione del marito, luterano. La coppia aveva molto in comune: lui insegnava lettere classiche, lei era la figlia di un preside, a sua volta molto versata in greco antico e studiosa di tragedie classiche. Erwin, il primo figlio, nacque nel 1900 e diventò un chimico. Werner, il secondo, venne alla luce un anno dopo e cambiò il mondo fisico.

In quegli anni l'insegnamento in Germania era una professione molto prestigiosa e ben retribuita; dunque gli Heisenberg poterono permettersi di far frequentare ai figli le scuole migliori. Nel 1910 August fu nominato professore di greco medievale e moderno all'Università di Monaco, città dove la famiglia si trasferí. L'anno seguente Werner entrò alla Kaiser-Maximilian Schule, dove già aveva studiato Planck; suo nonno materno, Nikolaus Wecklein, ne era allora preside. Il ragazzo si rivelò sveglio e intelligente, anche perché il padre lo spronava a gareggiare sempre con il fratello maggiore, e mostrò un talento particolare per la matematica e le scienze. Era anche un bravo musicista: a dodici anni teneva già concerti al pianoforte per i suoi compagni di scuola.

Come scrisse poi parlando della sua vita, «l'interesse per le lingue e per le scienze esatte si manifestò in me molto presto». Otteneva i voti piú alti in latino, greco, matematica, fisica e religione; non era cosí bravo, invece, in tedesco ed educazione fisica. Grazie a un eccellente professore, Christoph Wolff, che gli preparava problemi speciali, si allenò bene alle sfide matematiche. Presto l'allievo superò il maestro, come si legge in una pagella: «Il suo studio autonomo nel campo fisico-matematico l'ha portato a un livello molto superiore a quello richiesto dalla scuola». Da autodidatta apprese la teoria della relatività, che lo affascinò piú dal punto di vista formale che delle applicazioni al mondo fisico. Imparò da solo anche l'analisi, non compresa nel programma scolastico, per poter dare lezioni a uno studente universitario. Si appassionò in particolare alla teoria dei numeri, che gli sembrava «cosí chiara, cosí comprensibile da cima a fondo».

Per stimolarlo, suo padre gli procurò dei classici della matematica scritti in latino, tra cui la dissertazione dottorale di Kronecker, dedicata alla teoria algebrica dei numeri (Kronecker è rimasto celebre per aver affermato che «Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo»). Pare che la lettura di questo lavoro abbia ispirato Heisenberg a cimentarsi con la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat.

Allo scoppio della Prima guerra mondiale, la Germania si trovò stretta nella morsa di un blocco mercantile, che fece diminuire le scorte di cibo e carburante. Tutte le istituzioni scolastiche venivano periodicamente chiuse perché non c'era la possibilità di riscaldarle; lo stesso Werner un giorno si sentí cosí debole per la fame da cadere in un fosso. Suo padre e i professori erano al fronte, mentre lui, come tutti i giovani rimasti a casa, riceveva un'istruzione di tipo militaresco e un indottrinamento nazionalistico. La fine della guerra significò anche la fine della monarchia tedesca. La Baviera divenne per breve tempo uno Stato socialista modellato sull'Unione Sovietica, ma nel 1919 le truppe di Berlino intervennero e il regime si trasformò in una piú moderata socialdemocrazia.

Come molti suoi coetanei, Werner era stato disilluso dalla sconfitta del suo Paese, di cui incolpava le vecchie generazioni. Si iscrisse a un gruppo giovanile di estrema destra, i «Bund Deutscher Neupfadfinder», di cui divenne il leader. Il programma di questa e altre associazioni analoghe era la restaurazione della monarchia e il sogno di un Terzo Reich, spesso condito da una buona dose di antisemitismo; occorre dire, però, che il gruppo di Werner aveva anche membri ebrei. Per Heisenberg il «Bund» era fondamentale; passava molto tempo con i compagni in escursioni e campeggi nei boschi, cercando di ricreare un'idea romantica della Germania del buon tempo andato. Tutto ciò fu bruscamente interrotto nel 1933, quando Hitler mise al bando tutte le organizzazioni tranne quelle interne al regime nazista.

Nel 1920 Heisenberg si iscrisse all'Università di Monaco con l'intenzione di studiare matematica, fino a quando un colloquio con uno dei professori gli fece cambiare idea, spingendolo a passare alla fisica. Il suo maestro era il grande Arnold Sommerfeld, che riconobbe subito le capacità dell'allievo e lo ammise a frequentare i corsi piú avanzati. Ben presto Werner cominciò a produrre ricerche originali nella teoria atomica, usando il metodo quantistico. Ottenne il dottorato nel 1923, battendo il record di velocità dell'ateneo. In quello stesso anno Hitler cercò di rovesciare il governo bavarese con il cosiddetto «putsch della birreria», che doveva essere la prova generale della marcia su Berlino, ma fallí. Nel frattempo l'inflazione galoppava a livelli insostenibili. La Germania era a pezzi.

Dopo il dottorato Werner si mise a lavorare con i principali fisici dell'epoca alla teoria quantistica, che era il settore in cui tutti volevano cimentarsi perché sembrava dare i risultati piú eclatanti. Insieme con Max Born, propose un modello atomico piú preciso, in cui lo stato di un atomo era rappresentato a partire dalle frequenze del suo spettro, cioè dal tipo di luce emessa. L'idea di base portava a un tipo molto particolare di calcoli, con liste e liste di numeri. Born riconobbe in tutto ciò la presenza di una rispettabile branca della matematica, il calcolo matriciale; felice che tutto tornasse, pubblicò un articolo al proposito. In poco tempo, le idee iniziali si concretizzarono in un nuovo e sistematico formalismo della teoria quantistica, detto *meccanica matriciale*. Fu chiaro a tutti che era una seria rivale della proposta di Schrödinger.

Chi aveva ragione? Tutti e due: nel 1926 Schrödinger scoprí che i due formalismi erano due versioni della stessa teoria, proprio come i metodi euclidei e quelli algebrici sono due modi diversi di studiare la stessa geometria. In un primo tempo Heisenberg non voleva crederci, perché la sua meccanica matriciale si basava essenzialmente sull'esistenza di «salti», discontinuità tra gli stati dell'elettrone, rappresentati nelle matrici dai corrispettivi salti energetici. Gli sembrava impossibile che un oggetto di tipo continuo come un'onda potesse rappresentare questa realtà discreta. Come scrisse in una lettera all'amico e collega Wolfgang Pauli: «Piú penso alla parte fisica della teoria di Schrödinger, piú la trovo repellente [...] Ciò che scrive sulla visualizzazione è "probabilmente non del tutto corretto" – cioè, fa schifo». Ma in realtà questa disputa era la replica di un dibattito avvenuto secoli prima tra Bernoulli ed Eulero sull'equazione delle onde. Il primo era arrivato a una soluzione generale che sembrava continua, e il secondo non si capacitava di come avrebbe potuto comprendere anche le soluzioni discrete. Eppure Bernoulli aveva ragione, proprio come Schrödinger. Le equazioni sono continue, ma ciò non toglie che alcune caratteristiche delle soluzioni, tra cui in particolare i livelli energetici, siano invece discrete.

La maggioranza dei fisici preferiva la meccanica ondulatoria, perché sembrava piú intuitiva, mentre le matrici erano oggetti un po' troppo astratti. Heisenberg si teneva stretto le sue liste di valori numerici, perché erano tutte quantità osservabili; per contro, gli sembrava impossibile trovare la conferma sperimentale delle onde di Schrödinger. In effetti, secondo l'interpretazione di Copenaghen, ogni tentativo di misurazione di una grandezza quantistica fa «collassare» la funzione d'onda in un solo picco ben definito. Heisenberg invece era sempre piú preoccupato dal problema della misura: tutte le quantità delle sue matrici erano misurabili, contro nessuna delle onde di Schrödinger. Questa gli sembrava una ragione sufficiente per preferire il suo formalismo.

Sulla base di questi ragionamenti, Heisenberg scoprí che in linea di principio la posizione di una particella quantistica era misurabile con l'accuratezza desiderata, ma a un prezzo molto salato: maggiore è la precisione con cui si ricava questo valore, minore diventa quella della sua quantità di moto, ovvero della velocità. La limitazione vale anche nell'altro senso, cioè maggiore è la precisione con cui si misura la quantità di moto, minore è quella sulla posizione. Uno scambio analogo avviene tra gli intervalli di tempo e i livelli di energia.

Questo non era un problema di limitazioni tecniche degli strumenti, ma una caratteristica fondamentale della meccanica quantistica. Heisenberg la descrisse in una lettera a Pauli del 1927 e poi in un articolo, dove fu battezzato *principio di indeterminazione*. Era un altro esempio, dopo la velocità della luce nella relatività einsteiniana, di limite intrinseco di una legge fisica.

Nel 1927 fu nominato professore all'Università di Lipsia, il piú giovane di tutta la Germania; nel 1933, anno in cui Hitler prese il potere, gli fu conferito il premio Nobel. Divenne cosí una figura di prestigio in patria e all'estero. Fu uno dei pochi grandi fisici tedeschi a non abbandonare il Paese sotto il nuovo regime, il che fece sorgere il sospetto che ne condividesse gli ideali. Da quel che si può capire, Heisenberg non era un nazista, ma un fervente patriota, caratteristica che lo portò a essere in qualche modo complice di varie iniziative dubbie. Secondo certi documenti, pare che abbia cercato di impedire la cacciata dei professori ebrei dalle università, senza successo. Nel 1937 si trovò accusato di essere un *Weisse Jude* («ebreo bianco»), propugnatore di una fisica «degenerata», e fu minacciato di internamento in un campo. Per fortuna intervenne a suo favore Heinrich Himmler, capo delle SS. In quello stesso anno Heisenberg sposò Elizabeth Schumacher, figlia di un economista. Poco dopo nacquero due gemelli, primi dei sette figli della coppia.

Durante la Seconda guerra mondiale fu uno dei principali scienziati coinvolti nel progetto per la costruzione della bomba atomica tedesca. Lavorava a Berlino all'innesco di un reattore nucleare, mentre moglie e figli erano al sicuro nella seconda casa in Baviera. Circa il suo ruolo nel programma bellico nazista si sono scritti fiumi di inchiostro e recentemente il dibattito si è inasprito con la pubblicazione dei cosiddetti «rapporti di Farm Hall». Alla fine della guerra, fu trattenuto sei mesi dagli alleati a Farm Hall, in Inghilterra, insieme con i massimi fisici tedeschi; le conversazioni di questo gruppo di scienziati, registrate di nascosto, costituiscono appunto l'oggetto dei rapporti. In uno di questi si legge che Heinsenberg era solo interessato al reattore nucleare e non voleva farsi coinvolgere nella costruzione della bomba. Piú tardi scrisse: «Direi che ero pienamente convinto che il nostro gruppo fosse in grado di costruire una macchina alimentata a uranio, ma davvero non pensavo saremmo mai arrivati alla bomba. Nel profondo del cuore, ero molto sollevato da questa idea, devo ammetterlo». Questa e altre affermazioni sono oggi contestate da alcuni storici e il dibattito non accenna a placarsi.

Dopo il suo rilascio dalla prigionia, tornò in patria e si rimise al lavoro sulla teoria quantistica. Morí di cancro nel 1976.

Quasi tutti i creatori tedeschi della meccanica quantistica erano di buona famiglia, con una tradizione intellettuale alle spalle: figli di dottori, avvocati, accademici o comunque liberi professionisti. Vivevano in belle case dove si faceva musica e prendevano parte attiva alla vita sociale e culturale del Paese. Il grande fisico inglese di cui parleremo ora, invece, ebbe un'infanzia e una giovinezza molto piú tristi, per colpa di un padre autoritario ed eccentrico, che viveva in un mondo tutto suo, e una madre cosí sottomessa da mangiare in cucina con due figli, mentre il marito e il secondogenito consumavano i pasti in sala da pranzo, nel piú completo silenzio.

Il padre si chiamava Charles Adrien Ladislas Dirac; era nato nel Vallese, in Svizzera, nel 1866 e ne era scappato a vent'anni. Nel 1890 era arrivato a Bristol, in Inghilterra, Paese dove sarebbe rimasto e di cui sarebbe diventato cittadino nel 1919. Nel 1899 sposò Florence Hannah Holten, figlia di un capitano di lungo corso; l'anno seguente nacque il primo figlio, Reginald, seguito due anni dopo da Paul Adrien Maurice e quattro anni dopo da Beatrice.

Charles non disse ai genitori che si era sposato e aveva avuto dei bambini fino al 1905, quando tornò per la prima volta in Svizzera. Lí scoprí che il padre era morto da dieci anni.

Lavorava come insegnante all'istituto tecnico navale di Bristol. Gli si riconosceva in generale una certa competenza, ma era ben noto per la severità e l'apparente assenza di umanità. Era una sorta di sergente di ferro, come d'altronde molti professori del tempo.

Il piccolo Paul, già introverso di natura, fu reso del tutto asociale dalle stranezze del padre, che viveva isolato dal mondo. Charles voleva che il figlio gli si rivolgesse solo in francese, in teoria per stimolarlo a fare esercizio. Ma visto che il ragazzo lo parlava malissimo, in pratica stava quasi sempre in silenzio. Anche le strane abitudini dei pasti in famiglia parevano un risultato dell'imposizione della lingua paterna. Solitario e taciturno, Paul rifletteva sul mondo naturale. Non è chiaro se e quanto odiasse il padre; certo è che alla sua morte commentò: «Adesso mi sento molto piú libero».

Charles era orgoglioso dell'intelligenza di Paul, che si era rivelata presto. Aveva grandi ambizioni per i figli, che naturalmente avrebbero dovuto seguire la strada da lui pianificata. Quando Reginald comunicò che voleva studiare medicina, il padre lo obbligò a iscriversi a ingegneria. Il poveretto si laureò con molta fatica nel 1919; cinque anni dopo, mentre stava lavorando in un cantiere a Wolverhampton, si tolse la vita.

Paul rimase a vivere in famiglia e studiò anche lui ingegneria, nella stessa università del fratello. Avrebbe preferito iscriversi a matematica, ma non lo fece, forse per non contraddire la volontà paterna, forse perché erroneamente convinto (come molti ancora oggi) che l'unico sbocco professionale possibile per un matematico fosse l'insegnamento. Nessuno gli aveva detto che c'erano delle alternative, tra cui il mondo della ricerca.

La salvezza venne da un titolo di giornale. La prima pagina del «Times» del 7 novembre 1919 strillava: «RIVOLUZIONE NELLA SCIENZA / NUOVA TEORIA DELL'UNIVERSO / DEMOLITA LA CONCEZIONE NEWTONIANA». A metà della seconda colonna dell'articolo un sottotitolo recitava: «LO SPAZIO È "CURVATO"». La relatività fu presto sulla bocca di tutti.

Come ricorderete, la relatività generale implica che la forza di gravità sia in grado di deflettere la luce con un'intensità circa doppia di quella prevista dalla teoria classica newtoniana. Per verificare questa affermazione due spedizioni si mossero dall'Inghilterra per osservare un'eclissi. La prima, guidata da Frank Dyson e da Sir Arthur Stanley Eddington, era diretta all'Isola di Principe, nel Golfo di Guinea; la seconda, con a capo Andrew Crommelin dell'osservatorio di Greenwich, si recò invece a Sobral, in Brasile. In entrambi i casi gli scienziati riuscirono a osservare alcune stelle attorno al disco solare oscurato e trovarono delle piccole deviazioni nelle loro posizioni apparenti, che si accordavano con le previsioni della relatività ma non con quelle di Newton. Diventato una star dall'oggi al domani, Einstein spedí una cartolina alla madre: «Oggi grandi notizie. Hendrik Lorentz ha telegrafato per dirmi che le spedizioni inglesi hanno confermato praticamente la deviazione della luce da parte del Sole».

Dirac ne fu catturato: «Ero preda di una vera eccitazione riguardo alla relatività. Tra studenti ne discutevamo di continuo, però non avevamo molte informazioni attendibili al riguardo». L'opinione pubblica in gran parte non conosceva che il nome di questa nuova teoria. I filosofi sostenevano che non c'era nulla di nuovo sotto il sole, visto che da anni andavano dicendo che «tutto è relativo». Ovviamente non avevano capito nulla e si erano lasciati traviare facilmente da un termine, tra l'altro, poco indicato per descrivere il vero contenuto della teoria.

Paul seguí un ciclo di conferenze in materia tenute dal filosofo Charlie Broad, ma trovò che non contenevano quasi nulla di matematicamente preciso. Alla fine si comprò una copia di *Spazio, tempo e gravitazione* di Eddington e se lo studiò tutto, colmando da sé le eventuali lacune. Prima di laurearsi aveva raggiunto una perfetta conoscenza della relatività ristretta e di quella generale.

Tanto brillanti erano le sue meditazioni teoriche, quanto imbarazzanti le sue prove sperimentali. Piú avanti negli anni i colleghi avrebbero coniato l'espressione «effetto Dirac» per descrivere lo strano fenomeno che si verificava tutte le volte che metteva piede in laboratorio: bastava la sua presenza per mandare tutto a rotoli. Se avesse fatto davvero l'ingegnere sarebbe stato un disastro. Alla fine si ritrovò con una laurea con lode ma senza un lavoro, a causa della recessione postbellica. Fortunatamente gli fu offerta una borsa per continuare gli studi all'Università di Bristol, e colse l'occasione al volo, appassionandosi soprattutto alla matematica applicata.

Nel 1923 si trasferí a Cambridge, dove la sua timidezza si rivelò un vero handicap. Non praticava sport né era interessato a seguirli, non aveva amici, non si avvicinava nemmeno alle ragazze e passava quasi tutto il tempo in biblioteca (per dare l'idea della sua cronica riservatezza: nell'estate del 1920 aveva lavorato con il fratello in una fabbrica e i due si incrociavano in continuazione senza mai fermarsi a scambiare una parola. L'abitudine del silenzio doveva essere radicata in tutti i famigliari).

Nonostante tutto, la sua fama scientifica si consolidò molto presto. Nel giro di sei mesi aveva già scritto il suo primo articolo di ricerca, e altri seguirono in rapida successione. Nel 1925 la svolta: l'incontro con la meccanica quantistica. Durante una lunga gita autunnale nelle campagne del Cambridgeshire si mise a meditare sulla meccanica matriciale. Come oggetti matematici, le matrici hanno la caratteristica di non essere commutative, cosa che al principio aveva disturbato lo stesso Heisenberg. Dirac conosceva l'esistenza del commutatore, cioè della quantità $AB - BA$ che secondo un'idea originale di Lie è piú rivelatore del prodotto AB di due matrici, e aveva notato curiose somiglianze tra questo oggetto e le cosiddette «parentesi di Poisson», che compaiono nel formalismo della meccanica hamiltoniana classica. Solo che lí in campagna non si ricordava i particolari.

Corse al college e dopo una notte praticamente insonne si precipitò la mattina presto «dentro alla prima biblioteca aperta. Lí presi una copia della *Dinamica analitica* di Whittaker e trovai la formula corretta delle parentesi di Poisson. Erano proprio quello che cercavo». Con qualche calcolo scoprí che il commutatore di due matrici quantistiche era uguale alla parentesi di Poisson delle corrispondenti variabili classiche moltiplicate per la costante $ih/2\pi$, dove i è la solita radice di -1, h è la costante di Planck che abbiamo visto sopra e π è... π.

Era una scoperta davvero importante, che mostrava in che modo un sistema meccanico classico si potesse trasformare in uno quantistico. Il formalismo matematico era molto elegante e collegava tra loro due fondamentali teorie apparentemente distanti. Lo stesso Heisenberg ne fu favorevolmente colpito.

I contributi di Dirac alla meccanica quantistica non si contano. Per fare un esempio parlerò di uno dei vertici della sua ricerca, la teoria relativistica dell'elettrone del 1927. All'epoca ci si era accorti che gli elettroni avevano una proprietà detta *spin*, analoga alla rotazione di una palla attorno a un suo asse ma con bizzarre peculiarità che rendono la similitudine molto approssimata. Prendete una palla che gira e imprimetele una rotazione di 360°: il sistema torna nello stesso stato di partenza. Se provate a fare la stessa cosa con un elettrone, trovate che lo spin si inverte; per riportare tutto nello stato iniziale bisogna girare la particella di 720°.

Accade una cosa molto simile anche ai quaternioni, se li interpretiamo come gruppo di rotazioni. Come ricorderete, tutte le rotazioni nello spazio formano il gruppo SO(3), ma per i quaternioni e per gli elettroni serve in realtà SU(2). Sono praticamente la stessa cosa, ma SU(2) è piú grosso, visto che consiste in pratica di due copie di SO(3).

Questa duplicazione risulta in un doppio ricoprimento che trasforma una rotazione di 360° in una di 720°.

Dirac nei suoi articoli originali non usava né i quaternioni né i gruppi, ma verso Natale del 1927 iniziò a parlare di certe «matrici di spin», che svolgevano la stessa funzione. Oggi questi oggetti sono stati generalizzati nei cosiddetti *spinori*, che svolgono un ruolo importante nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Lie.

Le matrici di spin gli permisero di arrivare a un modello quantistico e relativistico dell'elettrone, che si rivelò molto piú potente del previsto. Oltre alle soluzioni consuete, prediceva infatti l'esistenza di soluzioni con energia negativa, che dopo qualche perplessità e falsa partenza furono interpretate da Dirac come tracce dell'*antimateria*. Ogni particella doveva avere un'antiparticella corrispondente, con massa uguale ma carica opposta. L'antielettrone si chiama positrone e prima di allora nessuno ne aveva previsto l'esistenza.

Le leggi fisiche rimangono (quasi) inalterate dopo la sostituzione delle particelle con le corrispettive antiparticelle, dunque questa operazione è una simmetria naturale. Pur non avendo una grande passione per la teoria dei gruppi in sé, Dirac aveva scoperto uno dei gruppi di simmetrie piú affascinanti del mondo fisico.

Dal 1935 fino alla morte, avvenuta a Tallahassee, in Florida, nel 1984, le sue ricerche si caratterizzarono per una forte spinta verso l'eleganza formale, che per lui era la chiave di volta della fisica. Una teoria non bella, a suo parere, non poteva essere vera. Durante la sua visita a Mosca nel 1956, gli fu chiesto secondo una vecchia tradizione di scrivere una frase per i posteri su una lavagna dell'università; e il suo messaggio fu: «Una legge fisica deve essere dotata di bellezza matematica». Eppure non ebbe mai una grande opinione, sotto questo punto di vista, della teoria dei gruppi. Forse ciò era dovuto al modo in cui i fisici vi si accostano in genere, cioè attraverso un mare di calcoli. La raffinata bellezza dei gruppi di Lie, all'epoca, sembrava essere apprezzata solo dai matematici.

Eleganti o meno, i gruppi sarebbero diventati uno strumento fondamentale per gli aspiranti esperti di meccanica quantistica. E questo grazie alle idee del figlio di un conciatore.

Alla fine dell'Ottocento il commercio delle pelli era un'attività redditizia, cosí come lo è oggi. All'epoca, però, era possibile fare buoni affari anche con piccole botteghe artigiane, come ad esempio quella del conciatore Antal Wigner. Di origine ebraica ma non praticante, era un cittadino dell'impero austroungarico che viveva con la moglie Erzsébet nella città di Pest (che unita alla sua gemella di là dal fiume, Buda, oggi si chiama, ovviamente, Budapest).

Jenő Pál Wigner, secondo di tre figli, nacque nel 1902. Dopo un periodo iniziale di educazione casalinga con precettori privati dai cinque ai dieci anni, fu mandato a scuola ma subito ritirato, perché gli fu diagnosticata la tubercolosi. Spedito in un sanatorio austriaco, ci rimase sei settimane prima di essere rimandato a casa: i medici per fortuna si erano sbagliati. All'epoca, la diagnosi di tubercolosi equivaleva a una condanna a morte quasi certa.

Costretto durante la permanenza in sanatorio a stare sdraiato per gran parte del tempo, il ragazzo si mise a risolvere problemi di matematica a mente. Come scrisse in seguito: «Mi costringevano a stare su una sedia a sdraio per giorni e giorni e per passare il tempo mi misi a pensare intensamente alla costruzione di un triangolo date le tre altezze». Le altezze di un triangolo sono i segmenti che uniscono i vertici ai lati opposti in modo da essere perpendicolari ai lati stessi. Sono facili da trovare, dato il triangolo di partenza, mentre il problema inverso è assai piú complicato.

Dimesso dal sanatorio, Jenő frequentò il Liceo Luterano di Budapest, dove nel 1915 incontrò un ragazzo che sarebbe diventato uno dei piú grandi matematici al mondo: János (poi John) von Neumann. I due però non divennero mai amici, perché von Neumann tendeva a stare sulle sue.

Nel 1919 i comunisti presero il potere in Ungheria e i Wigner fuggirono in Austria, per poi ritornare a Budapest poco dopo, in seguito a un rapido mutamento politico. La famiglia si era convertita al cristianesimo, ma la cosa non ebbe grandi conseguenze sulla vita di Jenő, che non era particolarmente religioso.

Nel 1920 si diplomò, tra i migliori del suo anno. Il suo desiderio era studiare fisica all'università, ma il padre voleva che prendesse in mano l'azienda di famiglia. Quindi si iscrisse a ingegneria chimica, materia piú utile per le possibili applicazioni alla conceria. Il primo anno lo passò al Politecnico di Budapest e poi si trasferí alla Technische

Hochschule di Berlino. I laboratori di chimica, dove trascorreva gran parte del suo tempo, gli piacevano molto. Non altrettanto poteva dirsi delle materie teoriche.

Eppure il pallino della fisica gli era rimasto. Dopo tutto l'Università di Berlino non era distante, e lí insegnavano luminari del calibro di Planck e Einstein, piú vari altri meno famosi. Approfittando della vicinanza, Jenő si mise a frequentare le lezioni di quei grandi. Riuscí comunque a laurearsi, con una tesi sulla formazione e scissione delle molecole, e si mise diligentemente al lavoro nella conceria. Non fu una buona idea, come si poteva immaginare: «Non mi piaceva stare lí, non andavo d'accordo con nessuno [...] Sentivo che quella non era la mia vita».

Nel 1926 fu contattato da un esperto di cristallografia del Kaiser-Wilhelm Institut che cercava un assistente. Wigner accettò, perché cosí avrebbe avuto l'opportunità di soddisfare i suoi interessi scientifici in un settore multidisciplinare. La mossa si sarebbe rivelata fondamentale per la sua carriera, e per la storia della fisica nucleare, perché in quel contesto avrebbe presto familiarizzato con i gruppi, con la matematica della simmetria. La cristallografia si era dimostrata il primo settore in cui i gruppi avevano avuto un'utilità pratica, portando alla classificazione delle 230 possibili strutture cristalline. Nelle parole di Wigner: «Ricevetti una lettera da questo specialista, che voleva scoprire perché gli atomi occupassero nei reticoli cristallini le posizioni corrispondenti agli assi di simmetria. Mi spiegava anche che il lavoro avrebbe avuto a che fare con la matematica dei gruppi, e quindi mi chiedeva di leggere un manuale di algebra e di andare da lui quando l'avessi ben capito».

Il padre, deluso dalle pessime prove del figlio nel business famigliare, acconsentí a questo cambio di carriera. Jenő si mise a leggere qualche articolo di Heisenberg sulla meccanica quantistica e inventò un metodo per calcolare lo spettro di un atomo con tre elettroni. Si rese conto, però, che i calcoli diventavano presto complicati, rendendo di fatto impossibile la soluzione con un numero di particelle maggiore. A questo punto si ricordò della sua vecchia conoscenza, von Neumann, che gli consigliò qualche testo sulla teoria delle rappresentazioni. Era un settore della matematica che all'epoca si basava in modo massiccio sul calcolo matriciale; ma grazie ai suoi studi di cristallografia e alla lettura del testo di Heinrich Weber *Lehrbuch der Algebra*, che allora

andava per la maggiore, le matrici non gli creavano nessun problema.

Il consiglio dell'ex compagno di scuola si rivelò prezioso. Gli atomi non «sanno» distinguere i loro elettroni, perché si tratta di particelle tutte identiche, il che significa che le equazioni che descrivono la radiazione emessa da un atomo devono essere simmetriche per tutte le permutazioni degli elettroni. Grazie alla teoria dei gruppi, Wigner riuscí a trovare un modello per lo spettro di atomi con un numero qualunque di elettroni.

Fino a quel momento le sue ricerche erano rimaste nel solco della tradizione classica, ma la meccanica quantistica era troppo nuova ed eccitante per essere trascurata. Fu cosí che Jenő si imbarcò nel suo capolavoro, l'applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica.

Paradossalmente, ciò avvenne come reazione a un altrimenti desiderabile cambiamento di lavoro. David Hilbert, l'anziano barone della matematica tedesca, si era interessato al mondo dei quanti e cercava un assistente che lo aiutasse nelle ricerche in quel nuovo campo. Nel 1927 il posto fu assegnato a Wigner, che si trasferí a Gottinga. Il suo compito era fornire un contenuto fisico alla vasta conoscenza matematica del maestro.

Le cose non andarono proprio cosí. I due si incontrarono solo cinque volte in un anno; Hilbert era anziano, stanco e sempre meno socievole. Il giovane fece allora le valigie e tornò a Berlino, dove si mise a tenere lezioni e a lavorare al suo libro piú famoso: *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (La teoria dei gruppi e la sua applicazione alla meccanica quantistica degli spettri atomici).

Era stato in parte anticipato da Hermann Weyl, che aveva scritto un trattato su un argomento analogo, ma questi si era concentrato soprattutto su questioni di principio, mentre Jenő si poneva l'obiettivo di risolvere specifici problemi fisici. Weyl cercava la bellezza, Wigner la verità.

Un buon modo per capire le idee di Wigner è calarci in un contesto classico e intuitivo, come le vibrazioni di un tamburo. Questi strumenti hanno in genere una membrana circolare, ma in linea di principio possono assumere qualunque forma. Percossa da una bacchetta, la membrana vibra ed emette un suono. Lo spettro delle frequenze producibili da uno strumento dipende da molti fattori, ma in ultima analisi dalla forma della membrana. Se questa è simmetrica, ci aspettiamo che anche lo spettro lo sia. E in effetti cosí è, ma in modo non immediato.

Prendiamo un tamburo rettangolare (un modello che non si vede spesso, al di fuori dei dipartimenti di matematica) e percuotiamolo. I tipici modi di vibrazione della membrana la suddividono in rettangoli piú piccoli, come nella figura 12.1*a*. Qui vediamo due istantanee che catturano due casi diversi; le regioni scure corrispondono ai ventri, quelle bianche alle creste.

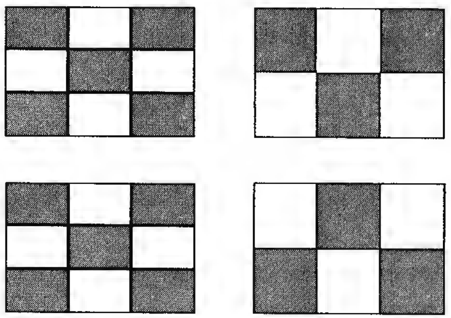
Se applichiamo una simmetria del tamburo a un possibile modo di vibrazione, ne dobbiamo ottenere un altro ugualmente possibile; quindi tali modi devono presentarsi a coppie. Però non è detto che un singolo modo abbia le stesse simmetrie del tamburo. Un rettangolo, ad esempio, è simmetrico per rotazioni di 180°; se applichiamo questa trasformazione al nostro esempio, otteniamo la figura 12.1*b*. A sinistra nulla è cambiato, mentre a destra le regioni scure e quelle bianche si sono scambiate di posto. Dunque il primo modo di vibrazione ha le stesse simmetrie di rotazione della membrana; nell'altro invece si è verificata una *rottura spontanea della simmetria*, fenomeno molto frequente in fisica, che accade quando un sistema simmetrico può presentarsi in stati meno simmetrici. Concentriamoci su quest'ultimo caso e vediamo quali sono gli effetti della rottura.

I due modi sono diversi, ma vibrano comunque alla stessa frequen-

Figura 12.1.
(*a*) Due modi di vibrazione di un tamburo rettangolare. (*b*) Gli stessi modi ruotati di 180°.

(*a*)

(*b*)



za, perché la rotazione, essendo una simmetria complessiva del tamburo, non può alterare le equazioni che ne descrivono le vibrazioni. Quindi lo spettro dello strumento contiene queste frequenze in duplice copia. Può sembrare difficile accorgersi del fenomeno in laboratorio, ma in realtà basta fare una piccola modifica allo strumento che ne disturbi la simmetria (ad esempio una piccola tacca su un lato); si vede allora che le frequenze dei due modi di vibrazione si separano leggermente, pur rimanendo molto simili, quel tanto che basta per verificarlo. Se ci fosse un solo modo per quella frequenza, il fenomeno non si verificherebbe.

Wigner capí che lo stesso effetto si produce in molecole simmetriche come gli atomi e i nuclei. Al suono del tamburo sostituite le vibrazioni delle molecole e allo spettro delle frequenze sonore quello della luce emessa o assorbita. Nel mondo quantistico lo spettro si crea con transizioni tra diversi stati di energia, che corrispondono alle frequenze (grazie a Planck) dei fotoni emessi. Nello spettro, che si può osservare con un apposito strumento detto spettroscopio, si trovano alcune frequenze doppie (o multiple), dovute alla simmetria dell'atomo o del nucleo.

Come si scoprono? Non possiamo fare una tacca nella molecola, come per il tamburo, ma la possiamo immergere in un campo magnetico. Anche questa operazione disturba la simmetria originaria e fa separare le linee dello spettro. A questo punto grazie ai gruppi, o meglio grazie alla teoria delle rappresentazioni dei gruppi, siamo in grado di calcolare le frequenze e il modo in cui si separano.

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi è uno dei settori della matematica piú eleganti e utili, ma è anche molto complessa e piena di trabocchetti. Wigner la rese un'arte sofisticata e altri lo seguirono, con qualche difficoltà, sulla stessa strada.

Nel 1930 ottenne un incarico part time all'Institute for Advanced Study di Princeton e per un po' di tempo fece la spola tra l'America e Berlino. Con l'arrivo dei nazisti al potere, agli ebrei fu proibito ogni incarico accademico, quindi tre anni dopo Wigner si stabilí negli Stati Uniti, dove anglicizzò il nome in Eugene Paul. Portò con sé la sorella Margit, che incontrò Dirac a Princeton e, tra lo stupore generale, lo sposò nel 1937.

Il matrimonio della sorella fu un sucesso, la carriera di Eugene un po' meno. Nel 1936 scriveva: «Mi hanno licenziato da Princeton, senza spiegarmi il perché. Sono davvero molto arrabbiato». In realtà si era dimesso, pare perché credeva di non avere possibilità di carriera. Il rifiuto di concedergli una promozione dovette sembrargli come una spinta alle dimissioni e quindi un licenziamento all'atto pratico.

Trovò subito un altro posto all'Università del Wisconsin, prese la cittadinanza americana e sposò una studentessa di fisica conosciuta lí, Amelia Frank. Purtroppo il matrimonio durò meno di un anno, perché la donna morí di cancro.

Nella sua nuova sede, si concentrò sulle forze nucleari e scoprí che erano governate dal gruppo di simmetria SU(4). Nel 1939 pubblicò un articolo fondamentale sul gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Però all'epoca la teoria dei gruppi veniva studiata da pochi fisici, che l'applicavano soprattutto nel settore molto specifico della cristallografia. Per la maggioranza, era matematica strana e complessa. Gli esperti di fisica quantistica, poco contenti dell'invasione di campo, parlavano apertamente di *Gruppenpest*, il «morbo dei gruppi», che rovinava il loro settore. Il contagio era partito da Wigner, e nessuno voleva ammalarsi. Ma le sue idee erano profetiche: la teoria dei gruppi avrebbe finito con il pervadere la meccanica quantistica, perché il campo d'azione della simmetria è onnicomprensivo.

Nel 1941 Wigner si sposò per la seconda volta con un'insegnante di nome Mary Annette, da cui ebbe due figli, David e Martha. Durante la guerra, insieme con von Neumann e quasi tutti i migliori fisici e matematici dell'epoca, lavorò al Progetto Manhattan per la costruzione della bomba atomica. Nel 1963 gli fu assegnato il premio Nobel.

Anche dopo molti anni di permanenza negli Stati Uniti, non dimenticava la madre patria: «Vivo qui da sessant'anni, – scrisse in tarda età, – eppure sono ancora piú ungherese che americano. Gran parte della cultura di questo Paese mi lascia perplesso». Morí nel 1995. Abraham Pais lo descrive come «un uomo bizzarro [...] e uno dei titani della fisica del Novecento». Le sue idee si stanno rivelando rivoluzionarie anche nel nostro secolo.

[1] L'autore utilizza il termine *wavicle* (da *wave*, «onda», e *corpuscle*, «corpuscolo»), che potremmo rendere in italiano con «onduscolo» [*N. d. T.*].

Capitolo tredicesimo
L'uomo a cinque dimensioni

Negli ultimi decenni del XX secolo la fisica poteva vantare straordinari successi. La relatività generale sembrava cogliere molto bene la struttura dell'universo a grandi scale. La previsione dell'esistenza di oggetti straordinari come i buchi neri, regioni dello spazio da cui la luce non può uscire, create dal collasso di immense stelle dovuto alla loro stessa attrazione gravitazionale, era stata verificata dalle osservazioni. All'altro capo della scala di grandezza, il mondo microscopico era descritto nei minimi particolari e in straordinario accordo con i dati sperimentali dalla meccanica quantistica, nella sua piú moderna incarnazione della teoria quantistica di campo (che include la relatività ristretta ma non quella generale).

Ma in questo paradiso si annidavano ben due serpenti. Uno era piú «filosofico», se cosí si può dire: queste due teorie cosí potenti erano in netto contrasto tra loro e partivano da presupposti mutualmente contraddittori. La relatività generale è *deterministica* e le sue equazioni non lasciano spazio alla casualità; la meccanica quantistica invece è intrinsecamente non deterministica, come mostra il principio di indeterminazione di Heisenberg, e molti eventi nel mondo microscopico accadono in forma casuale (ad esempio il decadimento di un atomo radioattivo). L'altro serpente era piú propriamente «fisico»: nella teoria corrente sulle particelle elementari c'era ancora qualche lacuna importante da riempire, come ad esempio la spiegazione del perché abbiano massa e perché questa assuma proprio certi valori.

Molti fisici pensavano che i due serpenti si potessero cacciare dal paradiso della scienza con un'azione di forza: unificare le due teorie, cioè trovarne un'altra logicamente coerente che si accordi con la relatività generale a grandi scale e con la meccanica quantistica a quelle piccole. Einstein ci provò per tutta la seconda metà della sua vita, senza successo. Con la modestia che li contraddistingue, i fisici hanno battezzato questa soluzione la *Teoria del Tutto*. La speranza è che un giorno l'intera disciplina si possa sintetizzare in un piccolo numero di equazioni stampabili su una maglietta.

Non è certo un'idea peregrina. Le equazioni di Maxwell stanno tranquillamente su una T-shirt; io ne ho una con quelle della relatività speciale, adornate dalla frase «E la luce sia!» in ebraico, che un amico mi ha comprato all'aeroporto di Tel Aviv. Se preferite considerazioni meno frivole, la storia della scienza ci insegna che in passato sono avvenute altre unificazioni, come ad esempio quella tra elettricità e magnetismo: due forze della natura apparentemente del tutto distinte che si rivelano manifestazioni di un solo fenomeno, l'elettromagnetismo. La parola stessa, che può sembrare poco elegante, rivela la natura di questa teoria, che è unificante. Un caso avvenuto piú di recente, molto meno noto ai non specialisti, è la scoperta della forza elettrodebole, che unifica elettromagnetismo e forza nucleare debole, di cui parleremo tra poco. Dopo l'entrata in questo consesso anche dell'interazione nucleare forte, all'appello manca solo la gravità.

Visti i precedenti storici, è ragionevole aspettarsi che anche quest'ultima forza sarà unificata con le altre e messa al suo posto nei ranghi della fisica. Purtroppo la gravità ha caratteristiche tali da rendere il compito molto difficile.

Magari la Teoria del Tutto è una chimera. Il fatto che le «leggi di natura» scritte sotto forma di relazioni matematiche abbiano finora spiegato con grande successo i fenomeni fisici non è garanzia che lo faranno sempre in futuro. Magari l'universo è meno matematico di quanto non immaginino i fisici.

Di sicuro le analisi quantitative approssimano il comportamento della natura con grande efficacia, ma non abbiamo la certezza che una certa equazione lo catturerà in modo perfetto. Forse il presente collage di teorie diverse è il massimo a cui possiamo aspirare: funziona bene, perché ogni pezzo descrive accuratamente la realtà nei rispettivi domini, e magari non esiste niente di onnicomprensivo.

Certo, in questo caso dovremmo premettere una lunga e noiosa lista di istruzioni per l'uso: «A bassa velocità e grande scala, usare la meccanica newtoniana», «Ad alta velocità e larga scala, usare la relatività ristretta» e cosí via. Sarebbe un vero pasticcio, una teoria bruttissima. Se la verità è bellezza, questa ipotesi non può che essere falsa. Ma forse l'universo, in fondo, è davvero brutto, privo di semplici princípî unificatori. È un'eventualità da far accapponare la pelle, ma chi ci autorizza a imporre la nostra estetica provinciale al cosmo intero?

La convinzione che la Teoria del Tutto esista davvero mi fa venire in mente le religioni monoteiste, che nel corso dei secoli hanno rimpiazzato le piú disparate collezioni di divinità dai poteri limitati con un solo dio, onnipotente e onnicomprensivo. In genere questo fatto è visto come un «progresso» della civiltà, ma assomiglia a una fallacia logica molto diffusa, in cui la stessa causa è attribuita a vari fenomeni misteriosi. Come scrisse Isaac Asimov, se non sapete dire se esistano gli Ufo, la telepatia e i fantasmi, la soluzione piú ovvia è ipotizzare che ci siano dischi volanti pilotati da fantasmi telepatici. Una «spiegazione» del genere dà un falso senso di sicurezza e progresso: da tre misteri siamo passati a uno solo. I tre fenomeni potrebbero benissimo avere tre cause del tutto differenti, solo che radunandoli insieme diventiamo ciechi di fronte a questa eventualità.

Quando una cultura giustifica l'esistenza del Sole con un dio del sole e quella della pioggia con un dio della pioggia, può dotare queste due divinità di caratteristiche specifiche. Ma se pensa che i due fenomeni siano controllati dallo stesso nume, corre il rischio di infilare a forza due cose molto diverse nello stesso cesto. Dunque in un certo senso la fisica delle particelle elementari è «fondamentalista»: le equazioni sulle T-shirt prendono il posto di un dio immanente e le loro conseguenze sulla vita di tutti i giorni sono le manifestazioni dell'intervento divino.

Nonostante queste riserve, il mio cuore batte per i fondamentalisti. Mi piacerebbe vedere un giorno la nascita di una Teoria del Tutto, e sarei estasiato se dentro ci fosse molta matematica, bella e vera. Penso che anche i fedeli possano sperare la stessa cosa, perché una teoria del genere sarebbe la prova della potenza, del buon gusto e dell'intelligenza del dio in cui credono.

La ricerca attuale della Teoria del Tutto ha le sue radici nei primi tentativi di unificare l'elettromagnetismo e la relatività generale, in un'epoca in cui erano le ultime frontiere della fisica. Il primo in assoluto fu effettuato solo quattordici anni dopo l'articolo fondamentale di Einstein sulla relatività ristretta, otto anni dopo la sua predizione che la gravità potesse deviare la luce e quattro anni dopo la presentazione al mondo in trepida attesa della relatività generale nella versione definitiva. Era un ottimo tentativo, tanto buono da avere la potenzialità di cambiare il corso della fisica; ma sfortunatamente per il suo autore, coincise con un evento che lo cambiò per davvero: la nascita della meccanica quantistica. Nella frenetica corsa all'oro che ne seguí i fisici persero interesse nelle teorie unificate, attratti da un campo che si preannunciava assai piú ricco e con maggiori potenzialità di fare scoperte fondamentali. Sarebbero passati altri sessant'anni prima che qualcuno rimettesse mano a quel primo tentativo di unificazione.

Tutto iniziò a Königsberg, allora capitale della Prussia orientale, oggi ribattezzata Kaliningrad, capoluogo di una enclave russa incuneata fra Polonia e Lituania. Le sorprendenti relazioni di questa città con la matematica si possono far risalire al Settecento e a un rompicapo. Königsberg era attraversata dal Pregel (oggi Pregolya); sette ponti collegavano le due rive tra di loro e a due isolotti in mezzo al fiume. Si chiedevano i cittadini nelle loro passeggiate: esiste forse un percorso che permetta di attraversare tutti i ponti una e una sola volta? Per rispondere alla domanda Eulero la trasportò a livello piú generale e fece un primo passo verso quella importante branca della matematica che oggi chiamiamo topologia (per inciso la risposta era negativa), che studia quelle proprietà geometriche che rimangono invariate anche quando un oggetto viene piegato, torto, schiacciato e in generale deformato in modo continuo, cioè senza strappi o tagli.

Questo settore è diventato oggi uno dei piú prolifici e ha molte applicazioni fisiche. Grazie alla topologia possiamo delimitare le forme possibili degli spazi a piú dimensioni, tema di crescente importanza in cosmologia e fisica delle particelle elementari. Nel primo caso ci potrebbe servire per conoscere la forma dello spaziotempo alla massima scala, cioè quella dell'universo intero; lo stesso dicasi per la minima scala possibile, quella della particella fondamentale. Potreste pensare che la forma cercata sia ovvia, ma i ricercatori ne sono sempre meno convinti. E anche i loro dubbi hanno una remota origine in quel di Königsberg.

Nel 1919 un oscuro matematico dell'Università di Königsberg di nome Theodor Kaluza ebbe un'idea balzana, la scrisse su un foglio di carta e la spedí ad Einstein, che a quanto pare rimase senza parole dopo averla letta. In modo elegante e naturale, Kaluza aveva trovato una via per combinare la gravità e l'elettromagnetismo in un'unica teoria di campo, cioè proprio l'obiettivo che Einstein stava perseguendo da tempo senza successo. L'unico problema era un'ipotesi abbastanza inquietante: perché l'unificazione avvenisse lo spaziotempo doveva avere *cinque* dimensioni, non quattro. Il tempo non cambiava, ma lo spazio in qualche modo acquistava una dimensione aggiuntiva.

L'obiettivo originario di Kaluza non era l'unificazione. Per qualche oscura ragione, aveva cincischiato con l'ipotesi delle cinque dimensioni come se fosse un esercizio di riscaldamento matematico, cercando di ricavare le equazioni di Einstein nel caso lo spazio avesse avuto quella assurda forma.

Nel caso ordinario a quattro dimensioni le equazioni si scindono in dieci parti, che insieme dànno origine al cosiddetto tensore metrico, quell'oggetto matematico che descrive la curvatura dello spaziotempo. In cinque dimensioni il tensore ha quindici componenti, dieci delle quali sono uguali a quelle del caso precedente; la cosa non deve sorprenderci perché uno spazio a quattro dimensioni è naturalmente immerso in uno che ne ha cinque. E le cinque equazioni aggiuntive? Avrebbero potuto essere qualsiasi cosa, strane espressioni prive di significato fisico. Invece quattro avevano un aspetto molto familiare, il che lasciò Einstein senza parole: erano esattamente le equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo, nella versione valida nell'ordinario spazio a quattro dimensioni.

Ne rimaneva una, che descriveva una semplice particella dal ruolo insignificante. Ma certo nessuno, Kaluza per primo, si era aspettato che la teoria di Maxwell saltasse fuori in quel contesto, dall'analogo in cinque dimensioni di una teoria che affrontava la sola forza di gravità. Sembrava quasi che la luce fosse una vibrazione in una piega nascosta dello spazio. L'unificazione funzionava, a patto di aggiungere una dimensione spaziale e arrivare dunque a un totale di cinque.

Einstein si ruppe la testa sulla lettera di Kaluza, perché non c'era nessun motivo di credere che la dimensione extra esistesse davvero.

Alla fine decise che per quanto strana potesse sembrare, l'ipotesi era affascinante e potenzialmente cosí importante da meritare la pubblicazione. Dopo due anni di tira e molla, la versione definitiva dell'articolo era pronta per essere stampata su un'autorevole rivista; il titolo tradotto suonava: «Sull'unità dei problemi della fisica».

Questo gran parlare di dimensioni aggiuntive vi sembrerà forse ambiguo e misticheggiante. Sembra di tornare all'epoca degli spiritualisti vittoriani, che invocavano la quarta dimensione come comodo ripostiglio dove infilare i fenomeni che non avevano senso nelle altre tre. Dove stavano gli spiriti? e gli ectoplasmi? Tutti là, chissà dove. Certi teologi si spinsero persino a ipotizzare che Dio e gli angeli si trovassero anche loro in qualche dimensione superiore, la quinta o magari la sesta, fino a rendersi conto che l'unico modo per farceli stare era prendere uno spazio con infinite dimensioni, adatto a un'entità onnisciente e onnipresente.

Divertente ma non troppo scientifico. A questo punto è bene fare una breve digressione per chiarire un punto importante: per «dimensione» un matematico o un fisico intende solo il numero minimo di variabili necessario a descrivere completamente un certo sistema.

Gli scienziati passano molto tempo a pensare alle variabili (i teorici) o a misurarle (gli sperimentali). Come dice il loro nome, sono quantità che possono cambiare. La parola «dimensione» viene dalla geometria e vuol dire la stessa cosa, anche se ormai si è talmente diffusa in vari ambiti da diventare parte comune del discorso, un concetto prosaico e privo di particolari attrattive.

Il tempo è una variabile non spaziale e dunque può costituire una quarta dimensione aggiuntiva alle tre naturali; ma questo ruolo, per assurdo, potrebbe essere ricoperto dalla temperatura, dalla velocità del vento o dalla vita media delle termiti tanzaniane. La posizione di un punto nello spazio dipende solo da tre variabili, cioè le sue distanze nelle tre direzioni indipendenti (tipo destra-sinistra, avanti-indietro, su-giú) rispetto a un punto di riferimento detto origine; l'uso del segno meno permette di individuare le direzioni opposte. Per analogia, un punto identificato in modo univoco da quattro variabili sta in uno spazio quadrimensionale, da 101 variabili in uno spazio 101-dimensionale e cosí via.

Un qualsiasi sistema complesso è intrinsecamente multidimensionale. Le condizioni meteorologiche del vostro giardino dipendono, tanto per cominciare, da temperatura, umidità, direzione e velocità del vento (tre componenti), pressione barometrica, intensità delle precipitazioni... e mi fermo qui, siamo già a sette e potrei andare avanti. Vi siete mai accorti di avere un giardino a sette dimensioni? Lo stato dei nove (anzi, ormai otto, povero Plutone!) pianeti del sistema solare dipende da sei variabili ciascuno, tre per la posizione e tre per la velocità. Il sistema solare è dunque un oggetto matematico con 54 (volevo dire 48) dimensioni, molte di piú se fate entrare nel conto satelliti e asteroidi. Un sistema economico con un milione di voci di scambio esiste in uno spazio a un milione di dimensioni. L'elettromagnetismo, a cui bastano sei variabili per descrivere lo stato in ogni punto dei due campi, al confronto è un gioco da ragazzi. Gli esempi non mancano di certo. Man mano che le scienze si occupano di sistemi sempre piú complessi, si trovano a dover trattare con spazi dalle dimensioni abnormi.

La descrizione formale di queste strutture è puramente algebrica e si basa su un'estensione «naturale» dei casi piú semplici. Un punto in un piano (spazio a due dimensioni) si può descrivere con una coppia di valori, le sue coordinate; nello spazio (a tre dimensioni), è necessario usare le triplette. Avete già capito qual è il passo successivo: in uno spazio a quattro dimensioni i punti sono identificati da quattro numeri e cosí via. Nel caso generale un punto in uno spazio n-dimensionale si può definire con una n-upla di numeri, le sue coordinate; viceversa lo spazio di dimensione n, n-spazio, si definisce semplicemente come l'insieme di queste n-uple.

Qualche ragionamento algebrico fatto sulla falsariga di questo ci porta a definire la distanza tra due punti in un n-spazio, l'angolo tra due rette e cosí via. È solo una questione di immaginazione: gran parte delle forme e dei concetti geometrici in due dimensioni si può generalizzare senza patemi d'animo nel caso n, descrivendoli per mezzo del formalismo algebrico delle n-uple di coordinate.

Per avere una sensazione piú diretta di un n-spazio dobbiamo equipaggiarci con un paio di occhiali speciali. A questo proposito, prendiamo a prestito un trucco inventato da Edwin Abbott, insegnante e uomo di chiesa inglese che nel 1884 scrisse il celebre libello intitolato

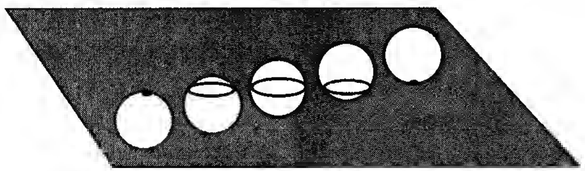
Flatlandia. Vi si raccontano le avventure di un quadrato che vive in un mondo a due dimensioni. Non ne conosciamo il nome ma solo l'iniziale A., e io sono convinto che si chiami Albert[1], per i motivi che ho spiegato nel mio sequel della storia, *Flatterland*. Albert Quadrato, uomo di buon senso, non crede all'assurda favoletta della terza dimensione, finché un fatal giorno una sfera interseca il suo piano e lo porta in territori che mai avrebbe immaginato esistessero.

Flatlandia è anche una satira dell'età vittoriana, bloccata nelle sue convenzioni, ma qui ci interessa soprattutto l'analogia con il passaggio da tre a quattro dimensioni. Se riusciamo a immaginare una creatura che vive felice su un piano, senza nemmeno lontanamente sospettare l'esistenza di una terza dimensione, allora possiamo concepire noi stessi come creature altrettanto ignare, vincolate al nostro spazio tridimensionale senza il benché minimo sospetto sulla realtà del 4-spazio. Come può il nostro Albert Quadrato capire che esistono gli oggetti solidi? Ce lo spiega Abbott con un trucco ingegnoso, facendo attraversare a una sfera il piano di Flatlandia lungo la perpendicolare, come mostrato nella figura 13.1. Albert è in grado di scorgerne le sezioni, prima sempre piú grandi, a partire da un punto fino ad arrivare all'equatore, e poi simmetricamente piú piccole, fino a sparire.

In realtà Albert scorge queste forme solo di lato, come segmenti con tratti piú chiari e piú scuri, ma il peculiare senso visivo degli abitanti di Flatlandia gli fa ricostruire la forma del cerchio, proprio come la nostra visione stereometrica interpreta la proiezione su un piano di un oggetto solido.

Per analogia immaginiamo di essere attraversati da una «ipersfera»,

Figura 13.1.
La sfera attraversa Flatlandia.



ovvero da una 4-sfera. Anche noi scorgeremmo prima un punto, poi una sfera sempre piú grande, fino all'«equatore» della 4-sfera, e poi al rovescio sfere sempre piú piccole fino alla completa sparizione (figura 13.2).

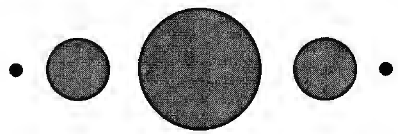
Ma allora lo spazio può avere *davvero* piú di tre dimensioni? Non all'interno di una storiella matematica molto graziosa, ma nel mondo *reale, fisico*? Dopo tutto sembra non esserci piú spazio per niente.

Se davvero pensate questo non avete imparato la lezione di Albert Quadrato, che prima del suo incontro con la sfera era della stessa opinione. Se abbandoniamo i nostri pregiudizi provinciali, ci accorgiamo che in linea di principio lo spazio può avere quattro, cinque o mille dimensioni, quante ne vogliamo. Però, se dobbiamo credere alle nostre osservazioni, il buon Dio ci ha piazzato qui, in questo universo particolare, con tre dimensioni piú una per il tempo.

Ne siamo davvero sicuri? Se c'è una cosa che la fisica dell'ultimo secolo ci ha insegnato è non fidarsi sempre del senso comune. Una sedia è solida al tocco, ma è quasi tutta fatta di vuoto. Lo spazio sembra piatto, ma grazie alla relatività generale sappiamo che invece è curvo. A scale ultramicroscopiche esiste una specie di schiuma quantistica, costituita in gran parte da buchi. E i devoti dell'«interpretazione a molti mondi» della meccanica quantistica sono convinti che il nostro universo non sia che uno tra gli infiniti altri universi che coesistono in ogni istante e che noi occupiamo solo una fettina trasparente di un piú vasto multiverso. Se il senso comune ci porta fuori strada riguardo a questi fatti, magari lo stesso avviene per le dimensioni extra.

Kaluza aveva avanzato una semplice ipotesi per spiegare la dimensione in piú dello spaziotempo. Le tre consuete dovevano essere retti-

Figura 13.2.
L'ipersfera attraversa Spaziolandia.

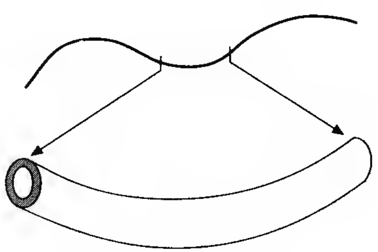


linee, lunghe miliardi di anni luce, per accordarsi con i dati osservativi. La quarta invece era molto diversa: arrotolata strettamente in un cerchietto molto piú piccolo di un atomo. Le perturbazioni delle onde luminose possono spostarsi anche in questa direzione aggiuntiva, perché sono sufficientemente minuscole; la materia invece no, non ci sta.

Non è un'idea folle come sembra. Pensate a un tubo di gomma come nella figura 13.3. Visto alla lunga distanza, sembra una curva priva di spessore, quindi dotata di una sola dimensione; ma se ci avviciniamo, ci accorgiamo che in realtà è un oggetto tridimensionale, con una piccola sezione piana. Questa struttura nascosta a un primo sguardo è in grado di spiegare un fenomeno osservabile anche a grande distanza, cioè la sua capacità di trasportare acqua. Ora immaginiamo che la sezione sia piú piccola del diametro di un atomo; per accorgersi delle dimensioni aggiuntive bisognerebbe guardare da molto, molto vicino. Dentro questo straordinario tubo non passerebbe piú l'acqua, ma solo oggetti piú piccoli di un atomo.

Quindi è possibile percepire gli effetti dell'esistenza di una dimensione extra senza vederla esplicitamente. Ciò significa che l'ipotesi è del tutto lecita e scientificamente solida: la sua presenza può essere verificata in linea di principio, anche se con metodi indiretti e non con la semplice osservazione. Gran parte delle conferme sperimentali della fisica sono di tipo indiretto, comunque, perché in certi casi se si potesse vedere davvero l'oggetto in questione non ci sarebbe bisogno di una teoria esplicativa. Nessuno ha mai osservato materialmente un campo

Figura 13.3.
A grande distanza un tubo sembra avere una sola dimensione, ma da vicino ci si accorge delle altre due.



elettromagnetico, ad esempio, ma tutti abbiamo visto le scintille e gli aghi delle bussole che si allineano in una precisa direzione. Da questi fenomeni uno scienziato inferisce la presenza del campo.

L'ipotesi di Kaluza godette di una certa popolarità perché era l'unica che portava in sé la speranza di una teoria unificata. Nel 1926 il matematico Oskar Klein ne propose una versione migliorata, in cui provava a spiegare con l'aiuto della meccanica quantistica perché la quinta dimensione fosse arrotolata cosí strettamente. Nei fatti, calcolò che doveva avere circa lo stesso ordine di grandezza della costante di Planck, 10^{-35} metri, un valore oggi noto come *lunghezza di Planck*.

La teoria, ribattezzata di Kaluza-Klein, continuò a riscuotere favori per un po'. Ma a un certo punto si fece troppo forte il peso dell'impossibilità di verificare in modo diretto l'esistenza della dimensione nascosta. Per definizione, tra l'altro, si accordava con tutti i dati sperimentali sia per la gravitazione sia per l'elettromagnetismo, dunque non era falsificabile. Né faceva previsioni su qualche specifico fenomeno misurabile. Questo problema di fondo attanaglia gran parte dei tentativi di teoria unificata: ciò che è verificabile è già noto e ciò che è nuovo non è verificabile. L'entusiasmo iniziale cominciò a scemare.

Il colpo mortale alla teoria di Kaluza-Klein, non alla sua validità ma all'opportunità di perderci del tempo, fu inferto dalla crescita esplosiva di un settore molto piú seducente, in cui si potevano fare previsioni verificabili sperimentalmente: la meccanica quantistica, allora in tutto il suo giovanile vigore.

Negli anni Sessanta del secolo scorso, però, la non piú giovane teoria cominciava a mostrare il fiato corto. I tumultuosi progressi iniziali avevano lasciato il posto a seri problemi e dati misteriosi. Il suo successo era innegabile e di lí a poco ce ne sarebbe stata un'ulteriore conferma con il «modello standard» delle particelle elementari; ma stava diventando sempre piú difficile trovare nuove questioni a cui si poteva sperare di dare risposta. Le ipotesi davvero innovative erano troppo complesse da verificare e quelle verificabili erano solo estensioni di cose note.

Da molte ricerche era emerso un principio di fondo: la chiave della struttura ultramicroscopica della materia sta nella *simmetria*, ma di un tipo particolare. Non i moti rigidi dello spazio euclideo, né le trasformazioni di Lorentz dello spaziotempo, ma nuovi concetti come la «simmetria di gauge» e la «supersimmetria», oltre a nuovi modi di vedere le permutazioni di oggetti, da cui era partito molto tempo prima Galois.

Ma cosa si intende per diversi tipi di simmetria?

Le simmetrie costituiscono sempre un gruppo, che però può agire in vari modi: spostare rigidamente un oggetto nello spazio euclideo, scambiare i posti agli elementi di un insieme, invertire il corso del tempo ecc. La fisica delle particelle portò alla scoperta di un nuovo tipo di azione, che per motivi storici oggi si definisce di *gauge* (o *di scala*), ma che avrebbe dovuto chiamarsi piú propriamente *locale*.

Supponiamo di stare visitando il Paese di Duplistan, la cui valuta è il pfunning, che viene scambiato a due a uno con l'euro. Ci aggiriamo per le strade, entriamo nei negozi e siamo in grado di fare la conversione senza problemi: il prezzo in pfunning è esattamente il doppio del suo valore in euro.

Questo è un tipo di simmetria. Le leggi delle transazioni commerciali non cambiano da una valuta all'altra; basta applicare il tasso di cambio e pagare con la moneta del Paese dove ci troviamo. Questa invarianza dunque è di tipo *globale*: l'idea di base rimane uguale (pago per avere un bene), muta solo la moneta.

Ora attraversiamo il confine e passiamo nel ridente Triplistan. Cambiamo nella valuta locale, il bollaro, e scopriamo che qui il rapporto è esattamente tre a uno. Anche in questo caso le leggi del commercio continuano a valere, ma tutti i prezzi sono moltiplicati per tre rispetto ai valori in euro.

Questa simmetria, allora, cambia di Paese in Paese. In Duplistan i prezzi sono dilatati di un fattore due, in Triplistan di un fattore tre, e scommetto che una capatina in Quintuplistan non vi troverebbe impreparati: lí il fattore sarebbe cinque. Tutte queste operazioni (cioè i cambi di valuta) possono agire simultaneamente, ma ognuna è valida solo in un particolare Paese.

Questa diversa riscalatura locale è una simmetria di gauge delle leggi universali del commercio. In linea di principio il tasso di cambio può essere diverso in tutti i punti dello spazio e del tempo, ma le leggi rimangono invarianti, se le si interpreta localmente secondo il valore corrispondente del «campo delle valute».

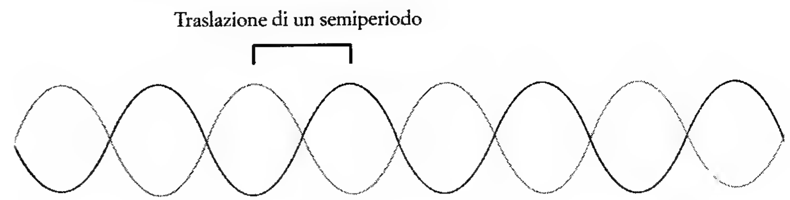
L'elettrodinamica quantistica combina la relatività ristretta con l'elettromagnetismo ed è stata la prima teoria unificante a essere proposta dopo quella di Maxwell. Si basa in modo fondamentale sulla simmetria di gauge del campo elettromagnetico.

Abbiamo visto che l'elettromagnetismo è simmetrico per l'azione del gruppo di Lorentz, le cui trasformazioni però devono essere applicate in modo globale, cioè in tutto l'universo, se si vuole conservare la validità delle equazioni di Maxwell. Oltre a questa simmetria ce ne è anche una di gauge, indispensabile per la teoria, data dai *cambiamenti di fase* nelle onde luminose.

Un'onda è fatta di oscillazioni regolari, la cui massima altezza è detta *ampiezza*. Il tempo in cui l'onda arriva alla cresta o al ventre (partendo dall'origine) si dice *fase*, e indica quindi il luogo e il momento in cui si ha il valore di picco. La fase in sé non è importante, quel che conta davvero è la differenza tra le fasi di varie onde. Se ad esempio questa differenza è uguale alla metà di un periodo, cioè alla metà del tempo che intercorre tra due creste o due ventri, allora le due onde sono perfettamente sfasate: alle creste dell'una corrispondono i ventri dell'altra (vedi figura 13.4).

Quando camminiamo, i piedi sono sempre in questa situazione di opposizione di fase. Per i quadrupedi la cosa è piú complessa: un elefante, ad esempio, tocca il suolo con le zampe rispettivamente in fase 0, $t/4$, $t/2$, $3t/4$, dove t è il periodo. Osservate che se iniziamo a contare da una zampa diversa otteniamo altri numeri, ma i valori impor-

Figura 13.4.
Lo spostamento di fase in un'onda.



tanti, cioè le rispettive differenze, rimangono uguali. Dunque le differenze di fase sono ben definite e hanno un preciso significato fisico.

Ora immaginiamo che un raggio di luce venga fatto passare attraverso un complicato sistema di specchi e lenti. Si scopre che il suo comportamento non dipende dalla fase, cioè che un cambiamento di fase è equivalente a un ritardo temporale nelle osservazioni o all'azzeramento dell'orologio dell'osservatore, e non influisce sulla geometria del sistema o sul cammino percorso dalla luce. Nulla cambia anche con due onde sovrapposte, se lo spostamento di fase è uguale per entrambe.

Finora l'operazione «cambiamento di fase» sembra essere una simmetria di tipo globale. Ma immaginiamo un fisico alieno che nel suo laboratorio della galassia di Andromeda esegua lo stesso esperimento: certo non ci aspettiamo conseguenze all'interno del nostro apparato terrestre. Quindi la fase si può cambiare a piacimento in ogni punto dello spazio e del tempo, senza per questo modificare le leggi fisiche che governano il comportamento delle onde. Questa possibilità di mutamento locale senza conseguenze a livello globale è proprio una simmetria di gauge delle equazioni di Maxwell, che si conserva anche nella loro versione quantizzata, cioè nell'elettrodinamica quantistica.

Uno spostamento di fase di un intero periodo lascia le cose come stanno. Questo comportamento ricorda da vicino le rotazioni, e in effetti i cambiamenti di fase a livello formale sono descritti dal «gruppo di gauge» SO(2), lo stesso delle rotazioni sul piano. Per vari motivi, però, i fisici preferiscono lavorare con trasformazioni unitarie, definite da numeri complessi. Per fortuna SO(2) ha anche un'altra incarnazione come U(1), il gruppo delle rotazioni nel piano complesso.

Ricapitolando: la simmetria di gauge dell'elettrodinamica quantistica è data da U(1).

Anche le due successive teorie unificate, l'elettrodebole e la cromodinamica quantistica, si basano in modo essenziale sulle simmetrie di gauge. Insieme costituiscono il modello standard, il modello piú accettato nella descrizione di tutte le particelle elementari. Prima di andare avanti, però, è bene spiegare in che senso queste teorie sono «unificate». Cosa mettono insieme di preciso? Non altre teorie, ma *forze*.

La fisica moderna riconosce quattro forze distinte in natura: la gravità, l'elettromagnetismo, l'interazione nucleare forte e quella debole. Sono tutte molto diverse tra loro: operano a scale spaziali e temporali ben distinte; alcune sono sempre attrattive, altre sempre repulsive, altre ancora dipende (dalla natura delle particelle o dalla loro distanza).

A un primo sguardo sembrano entità inconciliabili, troppo dissimili tra loro, ma sotto la superficie si scorgono indizi del fatto che le rispettive differenze sono meno importanti di quanto possa sembrare. Con pazienza si è scavato al loro interno, ricavando importanti prove dell'esistenza di una profonda unità, che forse potrebbe portare a un'origine comune di tutte le forze.

La gravità è onnipresente. Ne vediamo e sentiamo gli effetti in continuazione: quando facciamo cadere un piatto rompendolo, ciò che osserviamo è l'attrazione gravitazionale terrestre all'opera, che trascina il piatto verso il centro del pianeta, e il pavimento che si frappone interrompendo il moto. I porcellini appiccicati alla porta del frigo (perlomeno, questo è quanto vedo a casa mia) non cadono grazie alla forza magnetica, che dopo Maxwell sappiamo essere solo una manifestazione della forza elettromagnetica unificata. Il frigo stesso funziona grazie all'altra sua incarnazione, quella elettrica. In modo meno evidente, i frammenti del piatto rivelano anche l'azione della forza elettromagnetica, perché è quella che governa i legami chimici che tengono insieme la materia. Quando le tensioni tra le varie parti diventano troppo forti per essere controbilanciate da queste forze, l'oggetto va in mille pezzi.

Le due rimanenti forze agiscono a livello subatomico e non sono cosí immediatamente percepibili. Ma senza di loro non esisterebbe proprio la materia, visto che tengono insieme gli atomi del piatto, dei porcellini, del frigo, del pavimento e di tutto quanto.

In linea di principio, la presenza di altre forze potrebbe dar vita a un universo differente, eventualità su cui la nostra ignoranza è pressoché totale. Si sente dire che senza questa precisa distribuzione di forze la vita sulla Terra sarebbe impossibile, e che il nostro universo è dunque adatto fin nei minimi dettagli a ospitarci. Ma è un argomento fasullo, un'esagerazione senza fondamento basata su vedute troppo ristrette. Con altre forze non potrebbe esistere una vita *come la nostra*, ed è il colmo dell'arroganza dare per scontato che sia l'unico tipo possibile di vita. L'errore logico qui è dato dalla confusione tra condizioni sufficienti (le caratteristiche dell'universo da cui dipende la nostra vita) e necessarie.

La prima forza a essere descritta in modo scientifico fu, naturalmente, la gravità. Come già aveva chiaro Newton, è sempre attrattiva e si esercita fra tutti i corpi dotati di massa dell'universo. Il suo raggio d'azione è assai vasto, visto che l'intensità decresce abbastanza lentamente all'aumentare della distanza. D'altro canto, però, si tratta di una forza deboluccia rispetto alle altre tre: un magnetino di pochi millimetri è in grado di tenere attaccato un pezzo di plastica al frigo, vincendo senza problemi l'attrazione gravitazionale di tutta la Terra.

La seconda forza a essere isolata e descritta in modo compiuto fu l'elettromagnetismo. Sotto la sua influenza le particelle si attraggono o respingono a vicenda, a seconda che le rispettive cariche (o polarità magnetiche) siano diverse o uguali. Anche questa forza ha un raggio d'azione molto ampio.

I nuclei atomici sono fatti di neutroni e protoni; i primi, lo dice la parola stessa, sono neutri e non portano carica elettrica, i secondi sono invece positivi. La repulsione elettromagnetica tra i protoni dovrebbe far disintegrare i nuclei, che invece se ne stanno ben stretti grazie a qualche altra forza. La gravità è troppo debole (ricordiamoci dei magneti), quindi deve essere un'interazione di tipo nuovo, che i fisici hanno battezzato *nucleare forte*.

Ma ora abbiamo un altro problema. Se la forza forte vince quella elettromagnetica, come mai tutti i protoni dell'universo non si attraggono fino a riunirsi in un unico, gigantesco nucleo? È ovvio che l'effetto di questa forza deve valere solo a brevissime distanze, annullandosi fuori dal nucleo.

Queste tre interazioni non riescono a spiegare il fenomeno del decadimento radioattivo, grazie al quale gli atomi di certi elementi «sparano via» particelle e radiazioni elettromagnetiche trasformandosi in altri elementi ancora. Il caso classico è dato dall'uranio, che si trasforma in piombo. Deve esserci allora una quarta forza che governa queste emissioni, battezzata *nucleare debole*. Il suo raggio d'azione è cortissimo, ancora minore di quello della forte: agisce a distanze non piú lunghe di un millesimo del diametro del protone.

La fisica di una volta era molto piú semplice, quando i mattoni della materia erano solo protoni, neutroni ed elettroni, componenti dell'atomo che, a dispetto del nome (vuol dire «indivisibile» in greco), si spezzava eccome. Nel primo modello di Bohr protoni e neutroni erano strettamente uniti nel nucleo, a grande distanza dal quale orbitavano i leggerissimi elettroni. Le cariche positive, negative e neutre delle tre particelle si bilanciavano.

Pochi anni piú tardi questo modello «a sistema solare» fu sostituito da una versione piú precisa. Gli elettroni non orbitavano piú come puntini ben definiti, ma in un certo senso si spalmavano attorno al nucleo formando nuvole dalle forme bizzarre. L'interpretazione che si diede a questa immagine fu di tipo probabilistico: se cerchiamo un elettrone è piú probabile trovarlo là dove la nube si fa piú densa.

I fisici hanno inventato nuovi modi per sondare l'atomo, spezzarlo e indagare la natura delle sue parti. Il piú comune, ancora oggi in uso, è quello di lanciargli contro un altro atomo o una particella e vedere che succede ai frammenti. In seguito a una lunga storia troppo complessa per essere ricordata qui, la famiglia delle particelle elementari è andata via via crescendo di numero. C'è ad esempio il neutrino, in grado di passare attraverso milioni di tonnellate di piombo senza fare una piega, e per questo assai difficile da scovare; o il positrone, il gemello dell'elettrone con carica positiva la cui esistenza era stata predetta da Dirac nell'ambito della simmetria materia-antimateria.

Man mano che queste particelle aumentavano di numero, cresceva anche la voglia di mettere ordine e di cercare principî piú generali. Ormai i mattoni erano troppi per essere davvero tutti fondamentali. Ogni particella aveva le sue specifiche caratteristiche, date da massa, carica e spin. Come abbiamo già visto, quest'ultima è una proprietà che ricorda la rotazione della particella attorno a un asse, anche se l'immagine è molto imprecisa. Non dobbiamo pensare a un corpuscolo che gira nello spazio come la Terra, ma che si comporta in un modo definito (qualunque esso sia) in dimensioni esotiche.

Quasi tutti i valori erano quantizzati, come ci aspetteremmo, cioè erano multipli interi di una piccolissima unità di base, il quanto. Le cariche elettriche erano multiple della carica del protone, gli spin dello spin dell'elettrone. Non era affatto chiaro se e come le masse fossero quantizzate, visto che si presentavano come un pasticcio di dati eterogenei.

L'osservazione delle loro proprietà portò a raggruppare le particelle in diverse famiglie. La prima importante distinzione era tra quelle con spin multiplo dispari e quelle con multiplo pari. La ragione aveva a che fare con la simmetria: gli spin avevano diversi effetti se si facevano materialmente ruotare le particelle. In qualche modo, le esotiche rotazioni degli spin e quelle piú prosaiche dello spazio usuale erano collegate.

Le particelle dispari furono battezzate *fermioni* e quelle pari *bosoni*, in onore di due titani della fisica nucleare: Enrico Fermi e Satyendranath Bose. Poiché, per ragioni che all'epoca erano sembrate sensate, lo spin dell'elettrone fu posto pari a 1/2, risulta che i bosoni hanno spin intero (sono multipli pari di 1/2) e i fermioni frazionario, come 1/2, 3/2, 5/2 e cosí via, oltre ai corrispettivi valori negativi –1/2, –3/2, –5/2. Questi ultimi obbediscono al principio di esclusione di Pauli, per cui in ogni sistema quantistico non possono esistere due particelle nello stesso stato allo stesso tempo. I bosoni invece non seguono questa regola.

Tra i fermioni ci sono le particelle piú note, come protone, neutrone ed elettrone, oltre ad altre piú misteriose, dai nomi esotici come muone, tau, lambda, sigma, xi e omega, oltre a tre tipi di neutrino, associati rispettivamente a elettrone, muone e tau. I bosoni comprendono esemplari poco noti come pione, kaone ed eta.

Orbene, sappiamo che questo zoo di particelle esiste e ne conosciamo le proprietà fisiche. Il problema è ora dare un senso a questo caos apparente. Forse l'universo è stato costruito con materiali a caso, i primi capitati sotto mano? O c'è una qualche regolarità nascosta?

Una prima soluzione viene dalla scoperta che molte particelle in realtà non sono elementari, ma composte di altre piú piccole, i *quark*. Questi mattoncini (il cui nome è stato preso dal *Finnegan's Wake* di Joyce) si trovano in sei varietà diverse, etichettate in modo fantasioso come *up* (su), *down* (giú), *strange* (strano), *charm* (fascino), *top* (alto) e *bottom* (basso). Sono tutti fermioni, con spin 1/2, e ognuno ha il suo rispettivo antiquark.

Ci sono due modi per combinare i quark. Se ne usiamo tre otteniamo un fermione, come ad esempio il protone che è fatto di due up e un down, o il neutrone che contiene due down e un up, fino a una bizzarra creatura battezzata «omega meno» che consiste di tre strange. L'altro metodo fa uso di un quark e di un antiquark e dà vita a un bosone; materia e antimateria non si annichilano perché sono tenute a debita distanza dalle forze nucleari.

Perché tutti i calcoli tornino, è necessario assegnare ai quark cariche elettriche non intere, nella fattispecie 1/3 e 2/3 (con il segno opportuno). Inoltre i quark possiedono un'altra proprietà detta «colore», il che porta il loro totale a 18 (piú altrettanti antiquark). E non è finita, perché dobbiamo aggiungere anche le particelle che servono a «mediare» l'interazione nucleare debole, quella che tiene assieme i quark. La teoria risultante è nota come *cromodinamica quantistica* e ha una notevole eleganza matematica, nonostante il proliferare di particelle.

La meccanica quantistica spiega l'azione di tutte le forze mediante lo scambio di particolari particelle. Proprio come la pallina tiene insieme due giocatori di tennis ai lati opposti del campo, cosí queste messaggere interagiscono tra i soggetti della forza. La forza elettromagnetica è mediata dai fotoni, quella forte dai gluoni, quella debole dai bosoni di gauge deboli (non date la colpa a me per questi nomi bizzarri, sono quasi tutti accidenti storici). E la gravità? L'ipotesi piú probabile è che esistano particelle mediatrici dette *gravitoni*, che però nessuno ha mai osservato finora.

L'effetto macroscopico della presenza di queste particelle messaggere si traduce nel concetto di *campo*. L'universo è pieno di campi: gravitazionale, elettromagnetico e il cosiddetto campo di Yang-Mills, associato alle interazioni nucleari e chiamato cosí in onore dei fisici Chen Ning Yang e Robert Mills.

Possiamo allora schematizzare le forze fondamentali della natura in una comoda lista della spesa:

– *Gravità*: intensità 6×10^{-39}, raggio d'azione infinito, mediata dai gravitoni (non osservati, massa teorica 0, spin 2), forma il campo gravitazionale.

– *Elettromagnetismo*: intensità 10^{-2}, raggio d'azione infinito, mediata dai fotoni (massa 0, spin 1), forma il campo elettromagnetico.

– *Interazione nucleare forte*: intensità 1, raggio d'azione 10^{-15} m, mediata dai gluoni (massa 0, spin 1), forma una componente del campo di Yang-Mills.

– *Interazione nucleare debole*: intensità 10^{-6}, raggio d'azione 10^{-18} m, mediata dai bosoni di gauge deboli (massa maggiore di 0, spin 1), forma l'altra componente del campo di Yang-Mills.

Forse ritrovarsi con trentasei particelle fondamentali (tutti i tipi di quark), piú elettroni e compagnia, piú un assortimento di mediatrici, non è poi questo gran miglioramento rispetto alla sessantina di prima. Il vantaggio di questo modello, però, sta nella struttura piú leggibile delle famiglie di quark, che hanno un alto grado di simmetria. Sono tutte variazioni sullo stesso tema, al contrario dello zoo di particelle selvagge con cui si doveva fare i conti un tempo.

La descrizione della materia tramite i quark e le altre particelle viste sopra è detta *modello standard*. Si accorda molto bene con i dati sperimentali, anche se ha bisogno ancora di qualche ritocco per essere perfettamente in sintonia con le osservazioni; ad esempio alcuni valori delle masse devono essere aggiustati, ma una volta fatta la correzione tutti gli altri vanno a posto automaticamente. Le basi logiche sono solide.

I quark sono legati strettamente tra loro e non vanno mai in giro da soli, solo in coppie o terzetti. Nonostante questa limitazione, la loro esistenza è stata indirettamente confermata in laboratorio: non sono solo una furba ricombinazione numerica dello zoo di partenza. E chi crede che l'universo sia di base una costruzione elegante può trovare pane per i suoi denti nelle varie simmetrie dei quark.

Secondo la cromodinamica quantistica, un protone è formato da due quark up e uno down. Se lo smontiamo, preleviamo i mattoncini, li mettiamo in un bussolotto, li estraiamo a sorte e ricostruiamo il protone, non ci accorgiamo della differenza. Dunque le leggi che governano questa particella devono essere simmetriche rispetto alla permutazione dei suoi quark costituenti. La cosa piú interessante è che risulta esserci simmetria anche se cambiamo i *tipi* di quark: potremmo ad esempio trasformare un up in down e tutto continuerebbe a funzionare.

Dunque il gruppo qui all'opera non può essere semplicemente quello delle permutazioni di tre quark, formato da sei elementi, ma il suo parente *continuo* SU(3), che ricorderete faceva parte della lista dei gruppi semplici di Killing. Le trasformazioni in SU(3) non cambiano le *leggi* che governano le particelle, cioè le equazioni che ne governano gli stati, ma ne possono alterare le *soluzioni*. Per fare un esempio, con una di queste «rotazioni» un protone si trasforma in neutrone: basta rovesciare tutti i suoi quark, in modo che due up e un down diventino due down e un up. Tutti i fermioni si comportano in questo modo e le simmetrie di SU(3) agiscono trasformandoli come visto per il protone.

Altri due gruppi entrano in gioco nel modello standard. Le simmetrie di gauge della forza debole, SU(2), cambiano gli elettroni in neutrini. Anche SU(2) è un gruppo semplice. E il campo elettromagnetico, come abbiamo visto, porta in dote il gruppo U(1), che non è quello delle simmetrie di Lorentz, globali, ma quello delle simmetrie di gauge, locali. U(1) non fa parte della lista di Killing perché non è SU(1), ma ne è comunque uno stretto parente.

L'unificazione di elettromagnetismo e interazione nucleare debole nella teoria elettrodebole è avvenuta con la combinazione dei rispettivi gruppi di gauge. Il modello standard ci aggiunge anche quello dell'interazione forte, e lo fa in maniera molto diretta, prendendo semplicemente i tre gruppi insieme; in simboli: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. È una costruzione immediata ma non troppo elegante, che da questo punto di vista fa sembrare il modello standard una baracca tenuta in piedi con qualche pezzo di spago.

Immaginiamo di possedere una pallina da golf, un bottone e uno stuzzicadenti. La prima è una sfera, quindi ha come gruppo di simmetria SO(3), il bottone è assimilabile a un cerchio e dunque ha SO(2) e lo stuzzicadenti ha solo una simmetria di riflessione, quindi O(1). È possibile costruire un oggetto che abbia tutti e tre i tipi di simmetria? Certo, basta metterli insieme in un sacchetto. Ora siamo in grado di applicare a piacimento SO(3) girando la pallina, SO(2) facendo ruotare il bottone e O(1) ribaltando lo stuzzicadenti. Dunque il gruppo di simmetria di ciò che è contenuto nel sacchetto sarà $SO(3) \times SO(2) \times O(1)$. Ecco spiegato il metodo con cui nel modello standard si combinano le proprietà dei vari componenti; basta sostituire alle rotazioni e riflessioni fisiche le trasformazioni unitarie della meccanica quantistica (a coefficienti complessi). Anche il modello standard, quindi, soffre dello stesso problema, cioè la grossolanità con cui si effettua l'unione.

C'è un modo piú elegante per combinare gli oggetti senza fare ricorso ai sacchetti? Magari si riesce a incollare il bottone sotto la pallina e a tenere in bilico lo stuzzicadenti sul tutto, o a costruire altre ingegnose configurazioni, in modo che l'oggetto risultante abbia molte simmetrie, descritte da un gruppo come K(9) (che non esiste, l'ho appena inventato solo per fare un esempio). E magari, se siamo fortunati, i gruppi componenti SO(3), SO(2) e O(1) potrebbero rivelarsi sottogruppi di K(9). Sarebbe un procedimento di unificazione molto, molto piú interessante.

Anche i fisici avevano la stessa sensazione riguardo al modello standard e anche loro erano alla ricerca del loro K(9), magari un membro della lista di Killing o un parente stretto, visto che lí si trovano i mattoni fondamentali della simmetria. Cosí si sono messi alla ricerca di modi diversi per raggiungere l'unità, detti *teorie di grande unificazione* o GUT (Grand Unified Theories). Alcune delle GUT proposte si basano su gruppi semplici come SU(5), O(10) e anche sul misterioso gruppo eccezionale E_6.

Queste teorie sembravano avere gli stessi difetti dell'ipotesi di Kaluza-Klein, cioè non fornire previsioni verificabili. Ma a un certo punto le cose cambiarono: si trovò una proprietà inedita da verificare; era tanto strana da sembrare incredibile, ma di sicuro poteva essere sottoposta al vaglio dell'esperimento. Tutte le GUT portano alla possibilità di «ruotare» un protone per trasformarlo in elettrone o neutrino. Ciò significa che il protone è *instabile* e che alla lunga tutta la materia dell'universo diventerà radiazione. I calcoli mostrano però che la vita media di questa particella è circa 10^{29} anni, molto maggiore dell'età dell'universo. Però, se si mette insieme una colossale quantità di protoni, forse si può sperare che almeno uno di loro decada in tempi umani.

Una grande vasca piena d'acqua serve bene allo scopo. Dalla fine degli anni Ottanta a oggi in sei siti sparsi per il mondo i fisici hanno messo in piedi vari sistemi per cercare di catturare il decadimento di un protone, utilizzando fino a tremila tonnellate di acqua purissima. Ebbene, nessuno ha mai visto nulla. Mai. Ciò significa che la vita media del protone è di almeno 10^{32} anni, cioè mille volte maggiore rispetto alle previsioni delle GUT. Non ci siamo. Col senno di poi, sarebbe stato imbarazzante se le GUT si fossero rivelate piú affidabili, perché hanno tutte una grave mancanza: non comprendono la gravità.

Una vera Teoria del Tutto deve essere in grado di spiegare perché le forze fondamentali sono quattro e perché hanno quelle peculiari caratteristiche. Trovare qualcosa in comune tra di loro equivale a cercare gradi di parentela tra quattro animali diversi come un moscerino, un cigno, un vombato e un elefante.

Come sarebbe bello se si riuscisse a dimostrare che le quattro forze sono solo diverse manifestazioni di un'unica realtà. In biologia è stato fatto: moscerini, cigni, vombati ed elefanti fanno tutti parte del mondo dei viventi e sono accomunati dal DNA. Ciò che li distingue è dato da una lunghissima catena di cambiamenti nel rispettivo codice genetico. Tutti e quattro si sono evoluti a partire da un antenato comune, vissuto uno o due miliardi di anni fa.

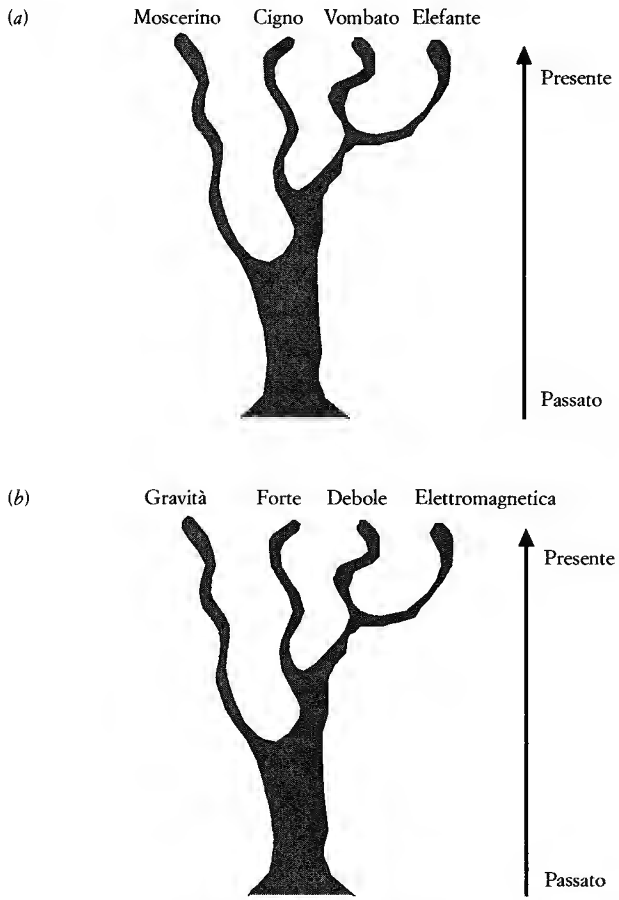
Procedendo nel tempo, vediamo che l'antenato comune tra vombato ed elefante è piú recente di quello tra cigno ed elefante, e la loro separazione costituisce la biforcazione piú in alto dell'albero dei viventi, mostrato in figura 13.5*a*. Sotto deve stare quella tra cigno e antenato comune di vombato ed elefante; sotto ancora quella tra moscerino e antenato comune di cigno, vombato ed elefante.

Il processo di speciazione può essere visto come una rottura della simmetria. Una specie è (approssimativamente) simmetrica rispetto alle permutazioni dei suoi individui: tutti i vombati sono simili tra loro. In un insieme che raduna due diverse specie, invece, le simmetrie sono limitate ai conspecifici, perché ad esempio non si può far cambio tra un vombato e un elefante senza che nessuno se ne accorga.

La spiegazione dell'unità di fondo delle quattro forze fisiche si basa su un principio simile, in cui però il ruolo del DNA è giocato dalla *temperatura* dell'universo, cioè dal suo livello energetico. Anche se le leggi di natura sono uguali nel tempo, portano a situazioni diverse al variare dell'energia, proprio come lo stesso quadro di riferimento porta l'acqua a comportarsi come un solido, un liquido o un gas a seconda della temperatura. Aumentando ancora il calore e dunque l'energia, arriva un punto in cui le molecole d'acqua si rompono e formano un *plasma* di particelle libere. A temperature ancora piú alte, le particelle si spezzano e dànno vita a un plasma di gluoni e quark.

Quando, tredici miliardi di anni fa, l'universo iniziò a esistere con il Big Bang, era indicibilmente caldo. All'inizio le quattro forze fondamentali si comportavano allo stesso modo (figura 13.5*b*); poi però, man mano che la temperatura media calava, avvennero successive rotture della simmetria che fecero dividere le forze fino a farle diventa-

Figura 13.5.
(*a*) Divergenza di quattro specie animali (*b*) e delle quattro forze fondamentali al passare del tempo.



re le quattro che conosciamo. L'universo presente non è che un pallido riflesso dell'elegante configurazione iniziale, risultato di tre momenti di frattura.

[1] Nell'originale di Abbot è *A. Square*, che si può intendere anche come «Un Quadrato» [*N. d. T.*].

Capitolo quattordicesimo
Il giornalista politico

Nel giugno 1972, durante la campagna presidenziale americana, una guardia di sicurezza che lavorava nel complesso di uffici del *Watergate Hotel*, a Washington, notò un pezzo di nastro su una porta che la manteneva socchiusa. Lo staccò, pensando che fosse stato dimenticato dall'impresa di pulizia. Piú tardi ripassò nel suo giro e scoprí che il nastro era di nuovo al suo posto. Insospettitasi, informò la polizia, che arrivò giusto in tempo per cogliere in flagrante cinque uomini entrati di soppiatto nel quartier generale del Comitato nazionale democratico. Venne fuori che i cinque erano legati al comitato per la rielezione dell'allora presidente Nixon.

L'episodio non ebbe grandi effetti sulle elezioni di novembre, che Nixon vinse a mani basse. Ma la storia sembrava vivere di vita propria e ben presto i tentacoli dello scandalo Watergate avvolsero figure sempre piú in vista del governo. Due giornalisti del «Washington Post», Bob Woodward e Carl Bernstein, seguirono la vicenda con ostinata determinazione, aiutati anche dalle rivelazioni di un'anonima «Gola profonda», un alto funzionario di cui nessuno conosceva l'identità (nel 2005 si scoprí che era Mark Felt, il numero due dell'FBI).

Le informazioni fatte trapelare alla stampa da Gola profonda erano una vera bomba. Lo scandalo montava e nell'aprile 1974 Nixon fu costretto a chiedere le dimissioni di due suoi consiglieri. Poi si scoprí che tutte le conversazioni all'interno della Stanza Ovale erano registrate e che esistevano nastri pieni di materiale scottante. Dopo una lunga battaglia legale, i nastri furono consegnati a una commissione d'inchiesta, ma si vide che presentavano delle lacune, apparentemente frutto di manomissioni.

Il tentativo di coprire i legami tra i malfattori e la Casa Bianca fu considerato dalla quasi totalità dell'opinione pubblica un crimine ben peggiore dell'intrusione negli uffici dei democratici. La Camera dei rappresentanti aprí la procedura formale di *impeachment* nei confronti del presidente, accusato di abuso di potere e di aver ostacolato il corso delle indagini. Quando capí che la condanna sarebbe stata certa, Nixon rassegnò le dimissioni.

Il suo rivale democratico nelle elezioni del 1972 era stato il senatore George McGovern. Nell'annunciare la sua candidatura alle primarie, mesi prima, a Sioux Falls nel Sud Dakota, aveva fatto questa osservazione che si sarebbe rivelata profetica:

> Oggi i nostri compatrioti non pensano di poter modellare le loro vite in accordo con quelle dei concittadini. Dietro questa sensazione c'è la perdita di fiducia nell'onestà e nel buon senso di chi ci governa. La frase piú preoccupante del nuovo vocabolario politico americano è il «gap di credibilità», il gap, la frattura tra retorica e realtà. Detto brutalmente, significa che la gente non crede piú alle parole dei leader.

Tra le figure di secondo piano all'interno del comitato per l'elezione di McGovern c'era un aspirante giornalista politico, la cui carriera avrebbe probabilmente preso una svolta decisiva se il suo candidato avesse vinto. In quel caso la storia e le scienze politiche avrebbero fatto un gran bell'acquisto. Ma i fatti si sono svolti diversamente, e nel 2004 questo signore è stato inserito dal settimanale «Time» tra le cento persone piú importanti dell'anno non per i suoi contributi al buon governo, ma alla fisica matematica.

Stiamo parlando di un uomo che ha creato alcune delle piú originali teorie matematiche mai viste, per cui ha ricevuto la medaglia Fields (il piú alto riconoscimento per la disciplina, paragonabile al premio Nobel), ma che strettamente parlando non è un matematico. Di un uomo che è considerato tra i piú importanti fisici teorici al mondo, che ha ricevuto per questo la National Medal of Science, ma che in tasca ha una laurea in storia. Dell'ispiratore, anche se non proprio il creatore, della teoria oggi piú accreditata come candidata all'unificazione della fisica. Del titolare della cattedra di fisica matematica all'Institute of Advanced Studies di Princeton. In poche parole, di Edward Witten.

Come i fondatori della meccanica quantistica (tranne il povero Dirac), Witten è cresciuto in un ambiente intellettualmente stimolante. Suo padre Louis è un fisico, specialista in relatività generale e gravitazione. Edward è nato a Baltimora, ha studiato storia alla Brandeis e dopo la vittoria di Nixon è ritornato all'università cambiando settore, fino ad arrivare al dottorato in fisica a Princeton. Dopo vari incarichi in atenei americani, è approdato nel 1987 all'Institute of Advanced Studies, dove è esonerato dall'insegnamento e può dedicarsi completamente alla ricerca.

I suoi primi lavori si sono concentrati sulla teoria quantistica dei campi, un settore in cui si cerca di riconciliare la meccanica quantistica con la relatività in uno spazio «piatto», cioè senza tener conto della problematica gravità. Come ha detto nel 1998, durante la prestigiosa «Gibbs Lecture» dell'associazione matematica americana, «la teoria quantistica dei campi comprende quasi tutto ciò che sappiamo in fisica, gravità esclusa. Nei suoi settant'anni di vita ha visto pietre miliari come la scoperta dell'antimateria [...] la descrizione particolareggiata dei comportamenti atomici [...] e il modello standard per le particelle elementari». Essendo frutto per gran parte degli sforzi di specialisti in fisica, fino ad allora mancava di rigore matematico ed era un territorio in cui le discipline procedevano abbastanza a compartimenti stagni.

I tempi erano maturi per un cambiamento. Witten si è accorto che interi settori della matematica pura erano in realtà teoria quantistica dei campi travestita. Il suo contributo principale allo svelamento è stata la cosiddetta «teoria quantistica topologica dei campi», in cui concetti inventati dai matematici per scopi del tutto diversi vengono applicati con profitto alla fisica. Tra queste idee apparentemente slegate c'è la scoperta, fatta dal britannico Simon Donaldson, che lo spazio a quattro dimensioni ha la peculiare caratteristica di avere molte diverse «strutture differenziabili», cioè sistemi di coordinate in cui è possibile il calcolo differenziale. Altre idee prese dai progressi piú recenti in campo matematico sono i polinomi di Jones (un importante strumento della teoria dei nodi), la cosiddetta «simmetria speculare» nelle superfici complesse a piú dimensioni e vari aspetti della teoria dei gruppi di Lie.

Secondo una coraggiosa affermazione di Witten, il XXI secolo vedrà molte idee provenienti dal settore della teoria quantistica dei campi diventare parte del sapere matematico condiviso:

> Da una parte abbiamo un'imponente catena montuosa, in gran parte celata alla vista da una fitta nebbia. Le teorie matematiche correnti ne scorgono solo i

picchi piú alti, al di là delle nuvole; dunque queste magnifiche punte si considerano isolate e si studiano una alla volta [...] Eppure, perse nella bruma, le altre montagne poggiano solidamente sulla teoria quantistica dei campi e nascondono un grande tesoro matematico.

L'attribuzione della medaglia Fields a Witten era proprio un riconoscimento delle sue esplorazioni tra queste montagne nascoste nella nebbia. Uno dei suoi risultati migliori è stata una nuova e piú convincente dimostrazione della «congettura della massa positiva», secondo la quale un sistema gravitazionale la cui densità di massa locale è positiva deve avere massa totale anch'essa positiva. Sembra una cosa del tutto ovvia, ma nel mondo dei quanti la massa è un concetto molto piú sofisticato di come lo intenda il senso comune. La prima dimostrazione di questo risultato tanto atteso, ottenuta da Shing-Tung Yau nel 1979, ha fruttato al suo scopritore la medaglia Fields tre anni dopo. La nuova versione di Witten sfruttava il concetto di *supersimmetria*, che veniva cosí utilizzato per la prima volta in un contesto matematico significativo.

Proviamo a capire cosa sia la supersimmetria con un vecchio trucco. Come si può costruire un tappo in grado di chiudere bottiglie con apertura a forma di cerchio, triangolo o quadrato? Parrebbe un'impresa impossibile e invece un tappo del genere esiste, come si vede nella figura 14.1. Sembra una fetta di torta di forma particolare; visto da sotto è un cerchio, visto da un lato è un triangolo e dall'altro lato un quadrato. L'oggetto tridimensionale è in grado di svolgere il suo compito grazie alle tre *proiezioni*, alle «ombre» proiettate sui tre piani ortogonali.

Ora immaginiamo che un abitante di Flatlandia si trovi sul piano orizzontale, in basso nella figura 14.1; ovviamente ignaro dell'esistenza del tappo e delle altre proiezioni, tutto ciò che vede è un cerchio. Un bel giorno scopre che il cerchio è diventato un quadrato. Che è successo? Di certo questa misteriosa trasformazione non è una simmetria.

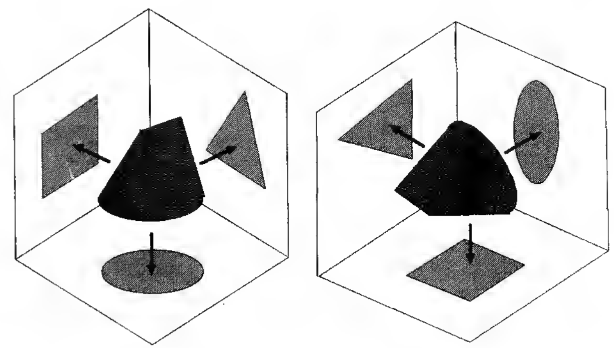
Non in Flatlandia, questo è sicuro. Ma qualche abitante del mondo a tre dimensioni ha semplicemente girato il tappo, come si vede nella stessa figura a destra, in modo che la proiezione sul piano orizzontale è diventata un quadrato. La rotazione di un oggetto può essere una simmetria nello spazio ma non nel piano.

La supersimmetria fa qualcosa di molto simile, però invece di cambiare cerchi in quadrati trasforma fermioni in bosoni, il che se ci pensate è sorprendente. Significa che possiamo fare calcoli e deduzioni con i fermioni, poi applicare un'operazione supersimmetrica e trovare dei risultati validi per i bosoni senza sforzi aggiuntivi. O viceversa.

È una proprietà che ci aspetteremmo dalle simmetrie. Se vi mettete di fronte a uno specchio e iniziate a far volteggiare nell'aria delle palline, ciò che accade dal vostro lato determina completamente quello che succede dalla parte dell'immagine. Se riuscite a completare un esercizio di alta giocoleria in 3,79 secondi, potete stare certi che il tizio nello specchio farà la stessa cosa nello stesso tempo e non dovete scomodarvi a cronometrare anche lui. I due eventi sono uniti dalla simmetria speculare: ciò che accade in un caso avviene, riflesso, anche nell'altro.

Le supersimmetrie non hanno effetti cosí evidenti, ma nemmeno troppo dissimili. Ci permettono di dedurre il comportamento di certe particelle osservandone altre, del tutto diverse. È come se ci fornissero la chiave per accedere a qualche dimensione superiore nascosta dove è possibile girare un fermione sino a farlo diventare un bosone, come avevamo fatto prima con il tappo per trasformare il cerchio in quadrato. Sulla base di questa proprietà possiamo definire i «partner supersimmetrici», cioè le versioni «ruotate» delle particelle originarie:

Figura 14.1.
La supersimmetria: un tappo in grado di coprire buchi di varie forme viene ruotato nello spazio.



l'elettrone ha il *selettrone*, i quark hanno gli *squark*, il fotone ha il *fotino* (termine che si usa al posto di «sfotone» per motivi storici). Sembra che esista un universo ombra pieno di s-particelle che interagisce in modo indiretto con il nostro.

La teoria è assai elegante. Purtroppo però le masse teoriche dei partner supersimmetrici sono troppo elevate, il che li rende impossibili da osservare sperimentalmente. La supersimmetria è bella ma forse non vera. Però non è detta l'ultima parola, perché forse un giorno sarà possibile verificarla in modo indiretto. La scienza, d'altronde, controlla la bontà delle teorie soprattutto esaminandone le conseguenze.

Witten ha sempre usato la supersimmetria con perseveranza. Al 1984 risale un suo celebre lavoro in cui la applica alla teoria di Morse, una branca della topologia fondata da Marston Morse che studia i legami tra la forma complessiva di uno spazio e i suoi punti piú alti e piú bassi. Secondo Sir Michael Atiyah, forse il piú grande matematico britannico vivente, questo articolo «dovrebbe essere letto obbligatoriamente da tutti gli esperti di geometria interessati a capire davvero la moderna teoria quantistica dei campi. Contiene anche una geniale dimostrazione delle classiche disuguaglianze di Morse [...] e si prefigge lo scopo di preparare il terreno a una teoria quantistica supersimmetrica di campo, in termini di varietà differenziabili di dimensioni infinite». Witten ha poi applicato queste tecniche in altri settori importanti, alla frontiera della topologia e della geometria algebrica.

Quando piú sopra scrivevo che non è un matematico, ovviamente non volevo dire che non conosce la disciplina, anzi. Witten è forse uno dei piú dotati e intuitivi matematici del pianeta, ed è anche un fisico dalla straordinaria capacità di comprensione dei fenomeni.

I fisici non si trattengono affatto dall'applicare le loro intuizioni in punti in cui la stretta logica non consentirebbe di proseguire. Questi salti sono però visti con sospetto dalla comunità matematica: per quanto forti siano le ragioni a favore di un certo fatto, senza dimostrazione nulla è davvero provato. Witten ha l'insolita capacità di tradurre queste intuizioni fisiche in un linguaggio accettabile dai matematici. Dice ancora Atiyah: «La sua abilità di interpretare le idee fisiche in forma matematica è davvero unica. Non è la prima volta che sorprende la comunità della ricerca con brillanti applicazioni di intuizioni fisiche che portano a teoremi nuovi e importanti».

Ma c'è un rovescio della medaglia. Molte delle sue idee piú importanti sono ricavate per analogia da qualche principio fisico e dunque mancano di una vera dimostrazione. In alcuni casi la lacuna è stata colmata, in altri no. Non sto certo dicendo che Witten non sappia dimostrare i teoremi (dopo tutto ha ricevuto la medaglia Fields!), ma solo che è in grado di compiere salti logici per arrivare a idee matematiche nuove e profonde, senza apparentemente aver bisogno di provarle.

La vera domanda è: le elegantissime idee di Witten sono di qualche utilità nella ricerca fisica? O l'obiettivo dell'eleganza formale lo ha distolto dalla retta via, conducendolo in un vicolo cieco matematico privo di collegamenti con la realtà?

All'inizio degli anni Ottanta la situazione era questa: tre delle quattro forze erano state unificate (elettromagnetica, debole e forte), ma la gravità continuava a sfuggire di mano. Eppure è la forza che piú entra nella nostra quotidianità, che ci tiene letteralmente con i piedi per terra. Era una mancanza davvero imbarazzante.

Non era difficile scrivere una serie di equazioni che combinassero in modo apparentemente sensato la gravità e la meccanica quantistica. Però le soluzioni erano del tutto insensate, con quantità fisiche standard che assumevano valori infiniti. La comparsa di valori infiniti è quasi sempre il segnale che qualcosa non va; ricordiamoci che la quantizzazione della luce fu introdotta da Planck proprio per correggere una stortura del genere.

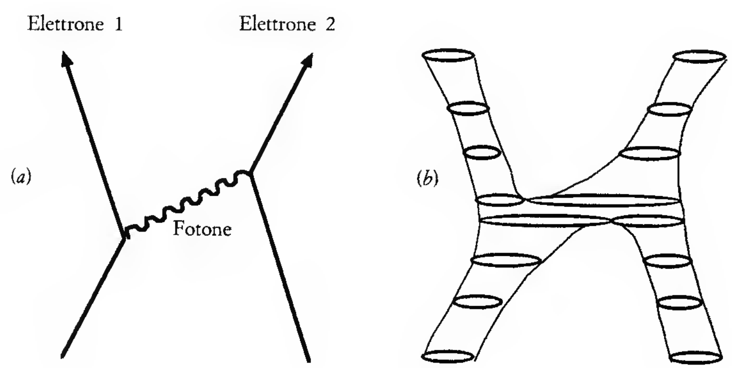
Qualche ricercatore si convinse che la fonte dei problemi era l'inveterata abitudine di considerare le particelle come oggetti puntiformi privi di dimensioni, cioè astrazioni matematiche. La meccanica quantistica trattava le particelle come strane nuvolette probabilistiche, ma il cambiamento di prospettiva sembrava non risolvere nulla. Ci voleva una cura piú drastica. Già negli anni Settanta alcuni pionieri avevano provato a sostituire i punti con minuscoli anelli vibranti, le *stringhe*. Nel decennio successivo, grazie alla supersimmetria, l'idea venne formalizzata nella teoria delle *superstringhe*.

Si potrebbe scrivere un libro intero su questi oggetti, e non pochi l'hanno fatto, ma qui possiamo cavarcela con una descrizione di massima. Mi concentrerò su quattro caratteristiche della teoria: il modo in cui unisce relatività generale e meccanica quantistica, la necessità di postulare dimensioni aggiuntive, l'interpretazione degli stati quantici come vibrazioni che avvengono all'interno delle dimensioni stesse, e le varie simmetrie che queste possiedono, o meglio che possiedono i vari campi.

Il punto di partenza sono le linee di universo che abbiamo già incontrato nell'undicesimo capitolo, cioè le curve che rappresentano la traiettoria di un punto nello spaziotempo, in pratica la traccia che lascia mentre si muove. Nella teoria della relatività, queste linee sono curve regolari, grazie alla struttura delle equazioni di campo di Einstein, e non si biforcano, perché la teoria è deterministica e il comportamento futuro di ogni sistema fisico è completamente determinato dal suo passato, anzi dal suo presente.

Nella teoria quantistica dei campi esiste un concetto analogo, detto *diagramma di Feynman*, che rappresenta le interazioni delle particelle all'interno di uno spaziotempo piuttosto schematico. Nella figura 14.2*a*, ad esempio, si vede il diagramma di Feynman di un evento tipico, cioè l'emissione da parte di un elettrone di un fotone, che viene catturato da un altro elettrone. Le linee ondulate si usano di solito per indicare i fotoni.

Figura 14.2.
(*a*) Diagramma di Feynman di un'interazione tra particelle. (*b*) Lo stesso con i fogli di universo, le cui sezioni sono stringhe.



La differenza tra un diagramma di Feynman e una linea d'universo è che il primo presenta spigoli e biforcazioni. Nel 1970 Yoichiro Nambu si accorse che sostituendo le particelle puntiformi con dei minuscoli anelli i diagrammi acquistavano regolarità, diventando superfici lisce a forma di tubo come nella figura 14.2*b*. Queste furono battezzate *fogli di universo*, a sottolineare il fatto che si trattava di linee di universo situate in uno spaziotempo modificato, cioè dotato di una dimensione aggiuntiva in cui far stare gli anelli.

La caratteristica piú importante di questi anelli, oltre al fatto di non essere puntiformi, è che possono vibrare. Se si riuscisse a dimostrare che a diversi modi di vibrazione corrispondono diversi stati quantici, si troverebbe la spiegazione del perché questi ultimi sono tutti multipli interi di una quantità base (ad esempio gli spin sono tutti multipli interi di 1/2). Infatti in un anello chiuso ci sta solo un numero intero di onde, in un modo che corrisponde, musicalmente, alla nota fondamentale e alle sue successive armoniche. Cosí la meccanica quantistica diventerebbe una sorta di teoria musicale, una composizione suonata con le superstringhe e non con le corde di violino.

La proposta di Nambu non nasceva dal nulla ma affondava le sue radici in una notevole formula ricavata da Gabriele Veneziano nel 1968; questa mostrava che diagrammi di Feynman apparentemente diversi in realtà rappresentano lo stesso processo fisico, fatto di cui si doveva tenere conto per evitare errori nei calcoli relativi alle teorie quantistiche di campo. Nambu vide, analogamente, che con la trasformazione dei diagrammi in tubi si azzeravano molte differenze, nel senso che diagrammi diversi davano vita a fogli di universo con la stessa topologia (cioè deformabili con continuità l'uno nell'altro). La formula di Veneziano sembrava proprio riferirsi alle proprietà topologiche di questi tubi.

Ma allora le particelle quantizzate, con le loro proprietà discrete, potevano essere il riflesso di certe caratteristiche topologiche, che in genere tendono a essere discrete (si pensi ad esempio al numero di buchi in una superficie). A grandi linee, tutto pareva funzionare a meraviglia. Ma come si dice, il diavolo è nei dettagli, e in questo caso i dettagli erano davvero diabolicamente complicati. La teoria delle stringhe è stato il primo tentativo di far tornare i conti in modo che si accordassero con i dati reali.

All'inizio l'ipotesi delle stringhe non era stata avanzata con l'obiettivo di arrivare a una Teoria del Tutto, ma solo di spiegare il comportamento di una classe di particelle dette adroni, che comprende protone, neutrone e altri esemplari piú esotici. Però nella sua prima formulazione aveva qualche problema: tanto per iniziare prediceva l'esistenza di una particella con massa 0 e spin 2, mai osservata fino ad allora (né fino a oggi), e poi non giustificava l'esistenza dello spin 1/2 che caratterizza molti adroni, tra cui protone e neutrone. Era come un modello meteorologico in grado di prevedere le grandinate eccezionali ma non di indicare se il tal giorno avrebbe fatto freddo o caldo. I fisici rimasero scettici. Poi nel 1974 fu presentata la cromodinamica quantistica, in grado di trattare senza problemi gli adroni conosciuti e di prevedere l'esistenza teorica di una particella, l'omega meno, poi effettivamente osservata. La partita sembrava chiusa.

Però John Schwarz e Joël Scherk si accorsero che la misteriosa particella con spin 2 e massa 0 poteva essere il tanto desiderato gravitone, l'ipotetico messaggero che si pensava mediasse la forza di gravità. E se la teoria delle stringhe fosse stata una spiegazione quantistica della gravità, invece che degli adroni? In quel caso sarebbe stata una buona candidata al ruolo di Teoria del Tutto, o almeno Teoria del Molto, perché esistono anche particelle che non sono adroni.

A questo punto entrò in scena la supersimmetria, con la sua trasformazione dei fermioni in bosoni. La classe degli adroni comprende rappresentanti di entrambi i tipi. Se si fosse trovato un modo di far comparire questa proprietà dentro le stringhe, molte altre particelle sarebbero entrate automaticamente nella sua orbita, portate dai loro partner supersimmetrici.

Grazie agli sforzi soprattutto di Pierre Ramond, André Neveu e dello stesso Schwarz, nacque cosí la teoria delle superstringhe. Oltre a comprendere anche le particelle con spin 1/2, questa nuova versione eliminava uno sgradevole difetto di quella precedente, che contemplava l'esistenza di oggetti piú veloci della luce. Come regola generale, oggi si pensa che una simile caratteristica renda le teorie instabili e quindi indesiderabili.

Dal 1980 in poi, il fisico teorico britannico Michael Green scoprí molte cose sulla matematica delle superstringhe, grazie a tecniche derivate dalla teoria dei gruppi di Lie e dalla topologia. Fu presto chiaro che, indipendentemente dal suo valore fisico, la nuova ipotesi era di straordinaria bellezza formale. Il contatto con la realtà però rimaneva problematico. Nel 1983 Luis Alvarez-Gaume e Witten scoprirono un nuovo problema: la teoria delle superstringhe, cosí come quella quantistica di campo, genera delle *anomalie*, che si verificano quando durante la traduzione di un sistema classico nella sua versione quantistica spariscono certe importanti simmetrie di partenza.

Green e Schwarz avevano scoperto che in pochi, fortunati casi le anomalie sparivano come per miracolo. Nelle superstringhe, ciò accadeva solo a condizione che lo spaziotempo avesse ventisei dimensioni (nella prima versione, detta teoria di stringa bosonica) o meglio dieci (nelle versioni piú avanzate). Perché? Perché a un certo punto nei calcoli spuntava un fattore $(d-26)$, poi corretto in $(d-10)$, moltiplicato per il termine che creava problemi. La lettera d indicava la dimensione dello spaziotempo, quindi per far sparire il tutto bastava imporre che questa fosse, appunto, 26 o 10. Il tempo rimaneva lineare, ma lo spazio doveva acquistare in qualche modo ventidue o sei dimensioni extra. Scrive Schwarz:

> Nel 1984 Michael Green e io svolgemmo un calcolo per verificare se in una certa versione della teoria delle superstringhe si presentasse o meno l'anomalia. Il risultato ci sorprese non poco. In generale, esisteva un fattore che rendeva il tutto poco soddisfacente. Però c'era libertà di scelta per le simmetrie fondamentali della teoria, che potevano assumere potenzialmente infinite forme. Ma con una e una sola scelta precisa le anomalie sparivano come per magia, il che non accadeva in nessun altro caso. Tra le infinite possibilità, se ne poteva scegliere una che prometteva di rendere consistente la teoria.

Ignorando per un momento gli strani valori 10 e 26, era una scoperta davvero emozionante. Forse c'era una stringente ragione matematica che portava lo spaziotempo ad avere un certo numero di dimensioni. L'unica seccatura era il fatto che il numero non fosse 4, ma era comunque un buon inizio. L'uomo si è sempre chiesto perché lo spazio fosse proprio fatto cosí e le superstringhe sembravano portare a una risposta piú convincente rispetto a quella che ci si era sempre data: «Bah, avrebbe potuto essere altrimenti, ma nel nostro universo capita che lo spazio sia tridimensionale».

Forse altre versioni della teoria avrebbero portato al valore corretto per le dimensioni. Ma non c'era niente da fare, per quanto si tentasse quegli strani numeri non volevano sparire. E se le dimensioni extra ci fossero davvero? Ritornava la vecchia idea di Kaluza della dimensione nascosta alle nostre osservazioni. In questo caso le stringhe avrebbero continuato a essere anelli lineari, le cui vibrazioni sarebbero però avvenute dentro spazi invisibili a molte dimensioni (vedi figura 14.3). I modi di oscillazione avrebbero determinato i numeri quantici delle particelle, come carica o spin.

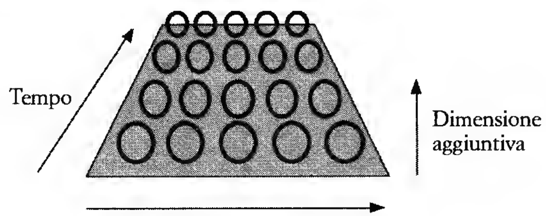
Naturalmente la domanda di fondo era: come sono fatte queste dimensioni nascoste? Qual è la vera *forma* dello spaziotempo?

In un primo momento i fisici speravano che si trattasse di un oggetto abbastanza semplice, come l'equivalente in sei dimensioni di un toro. Ma nel 1985 Philip Candelas, Gary Horowitz, Andrew Strominger e Witten mostrarono che la forma piú adatta alla teoria era quella di una cosiddetta varietà di Calabi-Yau. Ce ne sono migliaia di versioni; una abbastanza tipica è mostrata nella figura 14.4.

Il grande vantaggio di questi oggetti è che in questo modo lo spaziotempo a dieci dimensioni eredita le proprietà di supersimmetria da quello ordinario a quattro dimensioni.

Il nuovo quadro teorico stava portando i gruppi eccezionali di Lie alla ribalta nella ricerca piú avanzata in fisica. Il loro ruolo si faceva sempre piú importante con il progredire degli studi. Attorno al 1990 sembrava che ci fossero cinque possibili tipi di teoria delle superstrin-

Figura 14.3.
Le stringhe spuntano dallo spaziotempo ordinario con nuove dimensioni.



ghe, tutte in dieci dimensioni, chiamate tipo I, tipo IIA, tipo IIB, eterotica-O ed eterotica-E. I loro gruppi di gauge sono interessanti: ad esempio, il tipo I e la eterotica-O hanno SO(32), cioè il gruppo delle rotazioni in un 32-spazio, mentre la eterotica-E ha $E_8 \times E_8$, cioè due copie di una nostra vecchia conoscenza, il gruppo eccezionale E_8.

Anche G_2 si è scoperto avere un ruolo, e precisamente nell'ultima versione della storia, che Witten ha battezzato «M-teoria» (la «M» sta per magia, mistero o matrice). È una teoria che ipotizza uno spaziotempo a undici dimensioni e che unifica tutte le cinque varianti (a dieci dimensioni) viste sopra, nel senso che queste si possono ricavare dalla «madre» assegnando ad alcune sue costanti certi particolari valori. Le varietà di Calabi-Yau sono rimpiazzate da spazi a sette dimensioni detti varietà G_2, le cui simmetrie sono strettamente correlate proprio all'omonimo gruppo eccezionale di Killing.

Oggi si registra una certa reazione contro la teoria delle stringhe, non tanto perché si pensa che sia sbagliata, ma perché non c'è modo di sapere se sia giusta. Molti fisici autorevoli, soprattutto sperimentali, sono sempre rimasti scettici nei confronti di una teoria che non permetteva loro di fare alcunché: non c'era nessuna previsione da verificare, nessun dato da misurare.

Figura 14.4.
Una varietà di Calabi-Yau, raffigurata in modo schematico (disegno del professor Andrew J. Hanson, Università dell'Indiana).

Non sono un fanatico delle stringhe, né sono certo che siano la chiave con cui apriremo i misteri dell'universo, ma penso comunque che queste critiche siano ingenerose. All'accusato, cioè a chi propugna la teoria, si chiede di provare la sua innocenza, mentre dovrebbero essere gli accusatori, cioè gli scettici, a provare che è colpevole. Sono necessari molto tempo e molta fatica per concepire idee cosí radicalmente nuove; inoltre la teoria delle stringhe è tecnicamente molto complicata. In linea di principio è in grado di fare previsioni verificabili, il problema è che i calcoli relativi sono straordinariamente lunghi e difficili. Una quarantina d'anni fa anche la teoria quantistica dei campi attirava le stesse critiche; ebbene, alla fine i conti sono stati fatti, grazie a nuove tecniche matematiche e nuovi computer piú potenti, le prove di laboratorio eseguite e oggi non c'è altro settore della scienza dove si trovi un accordo cosí perfetto fra teoria ed esperimento.

Inoltre, gran parte di queste accuse si possono rivolgere a qualsiasi seria candidata al ruolo di Teoria del Tutto: paradossalmente, le migliori sono le piú difficili da dimostrare vere. Questo perché devono inglobare la meccanica quantistica e quindi fornire risultati corretti relativi a tutti gli esperimenti quantistici; lo stesso per la relatività. Quindi una Teoria del Tutto deve superare *ogni test fin qui concepito*. Chiederle di fornire una previsione che la faccia distinguere è come chiedere un oracolo che dia le stesse risposte delle teorie correnti a tutti i quesiti immaginabili relativi al mondo fisico conosciuto, eppure sia in qualche modo diverso dalle teorie correnti medesime.

Ovviamente dalle stringhe si dovrà prima o poi ricavare la previsione di un nuovo fenomeno e verificarlo sperimentalmente, compiendo cosí il passaggio dalla speculazione alla vera fisica. La necessità di accordarsi con tutto ciò che oggi sappiamo non implica che sia impossibile arrivare a formulare una di queste previsioni, ma spiega solo perché è molto difficile. Già sono state avanzate alcune proposte in tal senso. Ad esempio, secondo le piú recenti osservazioni delle galassie remote, l'universo si starebbe espandendo a velocità crescente. Secondo la teoria delle superstringhe, questo fenomeno è dovuto a un semplice fatto: la gravità sta lentamente «sgocciolando» anche dentro le dimensioni aggiuntive. Non è questa l'unica spiegazione del fenomeno proposta, però. È chiaro comunque che se la ricerca nel campo delle stringhe si interrompesse non avremmo la possibilità di sapere se la teoria è vera o falsa. Per arrivare a progettare un esperimento in grado di confermarla o smentirla, ammesso che sia possibile, ci vorranno molti sforzi e molto tempo.

Non vorrei dare l'impressione che le superstringhe siano le uniche candidate alla carica di grande unificatore tra quanti e relatività. Esistono varie proposte concorrenti, che però soffrono tutte dello stesso male: la mancanza di supporto sperimentale.

Una di queste, la *geometria non commutativa*, è frutto della fervida mente del matematico francese Alain Connes e si basa su un concetto inedito della geometria spaziale. Gran parte delle teorie di unificazione partono dall'idea che lo spaziotempo sia una qualche estensione del modello relativistico di Einstein e cercano di farci entrare in qualche modo le particelle elementari. Connes fa l'esatto contrario: parte da una struttura chiamata spazio non commutativo, che contiene tutti i gruppi di simmetria che compaiono nel modello standard, e ne deduce certe caratteristiche simili alla relatività. La matematica di questi spazi affonda le sue radici nelle idee di Hamilton, tra cui i quaternioni, fortemente generalizzate e modificate. Anche questa proposta, comunque, non può fare a meno dei gruppi di Lie.

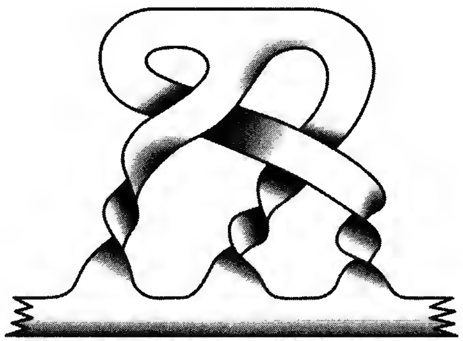
Un'altra candidata affascinante è la *gravità quantistica ad anelli* (spesso citata con il nome inglese, *loop quantum gravity*). Tutto è partito negli anni Ottanta da un lavoro di Abhay Ashketar, che si è messo a verificare quale forma avrebbero assunto le equazioni di Einstein in uno spazio «sgranato». Queste idee sono state portate avanti da Lee Smolin e Carlo Rovelli, che hanno proposto un modello di spazio simile a una cotta ferrata come quelle indossate dai guerrieri medievali, le cui maglie hanno un diametro di circa 10^{-35} metri. La struttura fine di questo complesso di anelli e giunture può diventare estremamente complicata, sino a formare nodi e attorcigliarsi. In un primo momento, però, non era chiaro il significato fisico di queste configurazioni.

Nel 2004 Sundance Bilson-Thompson ha scoperto che in alcuni casi questi intrecci riflettono perfettamente il comportamento dei quark. La carica elettrica si può ricavare sulla base della topologia della «treccia» associata e le regole per la combinazione derivano da semplici operazioni geometriche sulle trecce stesse (vedi figura 14.5). Il metodo è ancora in fase embrionale ma sembra in grado di produrre gran parte delle particelle presenti nel modello standard. È l'ultima di una serie di speculazioni che vedono la materia (le particelle, in questo caso) nascere come conseguenza delle singolarità presenti nello spazio, come nodi, perturbazioni e altre strutture piú complicate, luoghi in cui il panorama cessa di presentarsi come liscio e regolare. Se Bilson-Thompson ha visto giusto, la materia non è altro che un intreccio nella trama dello spaziotempo.

I matematici studiano da tempo la topologia delle trecce e sanno bene che anche queste formano un gruppo, il *gruppo delle trecce*, in cui la moltiplicazione è fatta unendo i cappi di due membri (un po' come la moltiplicazione di permutazioni che abbiamo visto parlando di Ruffini). Ancora una volta la fisica sembra costruire ipotesi a partire da una scoperta matematica precedente, in genere «fine a se stessa», studiata solo perché sembrava interessante. E, ancora una volta, la simmetria gioca un ruolo fondamentale.

Nell'ultimissima versione delle superstringhe, il problema principale è la sovrabbondanza. Al posto della mancanza di previsioni, ora ce ne sono troppe. L'«energia del vuoto», cioè il contenuto energetico dello spazio vuoto, assume un certo valore al variare delle configurazioni con cui le stringhe si arrotolano nelle dimensioni aggiuntive. Il problema è che le configurazioni possibili sono circa 10^{500}, un numero incomprensibilmente grande. Quindi ci sono circa 10^{500} valori ammissibili per l'energia del vuoto.

Figura 14.5.
Rappresentazione di un elettrone come una treccia.



Quello osservato, per inciso, non è zero, anche se è piccolissimo: circa 10^{-120} unità. Secondo la solita solfa dell'universo fatto apposta per noi, questo valore è proprio quello che ci voleva per la comparsa della vita. Se fosse maggiore di 10^{-118} lo spaziotempo esploderebbe, se fosse minore di 10^{-120} si contrarrebbe fino a sparire. Quindi la finestra utile è davvero molto piccola e per uno strano miracolo il nostro universo sta proprio lí dove dovrebbe.

Secondo il cosiddetto «principio antropico debole», se la realtà non avesse quelle precise caratteristiche non ci sarebbe nessuno a osservarla, il che però lascia aperta la questione del perché esista. Nella versione forte dello stesso principio la nostra esistenza si spiega con il fatto che l'universo è stato progettato proprio perché fosse possibile la vita al suo interno, il che è una sciocchezza misticheggiante. Nessuno sa per certo quali possibilità si aprirebbero se l'energia del vuoto fosse molto diversa da quello che è. Qualcosa andrebbe storto, certo, ma magari qualcosa cambierebbe in meglio. Le considerazioni antropiche, in genere, sono prive di senso.

Nel 2000 Raphael Busso e Joseph Polchinski hanno avanzato un'ipotesi diversa, basandosi sulla teoria delle stringhe e sfruttando a loro favore le 10^{500} possibilità di cui sopra. Il numero 10^{-120} è davvero piccolo, ma i potenziali valori energetici sono separati da 10^{-500} unità, numero immensamente piccolo. Quindi ci sono molte versioni delle stringhe che si trovano nella finestra corretta. La probabilità che una di queste scelta a caso sia quella giusta è ancora insignificante, ma la cosa è irrilevante, perché alla fine l'energia buona salterà fuori comunque. L'idea è questa: l'universo «prova» tutte le teorie possibili, rimanendo fedele alla candidata di turno fino a quando non va in frantumi (perché il valore dell'energia non è compreso nella finestra utile), e allora scappa grazie a un «tunnel quantistico» verso la prossima teoria della lista. Dopo un tempo sufficientemente lungo, all'universo capiterà di avere una buona energia del vuoto, in grado di permettere la nascita della vita.

Nel 2006 Paul Steinhardt e Neil Turok hanno proposto una variazione all'idea del tunnel: un universo ciclico che si espande dopo un Big Bang e si contrae in un Big Crunch, con un periodo di mille miliardi di anni o giú di lí. In questo modello, l'energia del vuoto diminuisce a ogni ciclo, in modo che alla fine abbia un valore abbastanza piccolo ma non nullo.

In entrambe le versioni della storia, un universo con energia del vuoto «giusta» deve esistere per un tempo molto lungo. Le condizioni favorevoli alla vita, dunque, durano abbastanza da permettere l'evoluzione di una creatura intelligente in grado di domandarsi che ci stia facendo lí.

Capitolo quindicesimo
Un coacervo di matematici

Uno stormo di uccelli, una mandria di bufali, un gregge di pecore... quale nome collettivo si usa per indicare un insieme di matematici? Un consesso? Per carità, troppo aulico. Una banda? Siamo già piú vicini al vero. Dopo aver osservato in molte occasioni il comportamento sociale e gregario di questa specie, penso che il termine giusto sia un «coacervo», cioè una mescolanza disordinata di elementi eterogenei.

Uno di questi coacervi ha inventato una struttura tra le piú bizzarre dell'intera disciplina e ne ha poi scoperto un principio unitario nascosto sotto la facciata barocca. Questi risultati, ottenuti in gran parte frugando a casaccio in cerca di non si sa bene cosa, stanno cominciando a insinuarsi nella fisica teorica e potrebbero anche svelare alcuni tra i piú stravaganti segreti delle superstringhe.

La matematica necessaria per studiare le superstringhe è cosí nuova da non essere stata ancora inventata ma, paradossalmente, si è appena scoperto che questi oggetti alle frontiere della fisica potrebbero avere un insolito legame con un relitto dell'età vittoriana, una costruzione algebrica cosí fuori moda che oggi quasi non compare piú nei corsi universitari. Si tratta degli *ottonioni* o *ottetti*, cioè della struttura numerica che segue la fila dopo i reali, i complessi e i quaternioni.

Gli ottonioni furono scoperti nel 1843, resi pubblici due anni dopo da un altro matematico e quindi erroneamente attribuiti a lui. La cosa non era poi cosí grave, perché quasi nessuno si accorse di loro. All'inizio del secolo successivo erano già caduti nel dimenticatoio. Ci fu un breve ritorno di popolarità nel 1925, quando Wigner e von Neumann cercarono di farne la base della meccanica quantistica, ma sparirono non appena il tentativo si rivelò fallimentare. Negli anni Ottanta sono tornati in scena come strumento potenzialmente utile nella teoria delle stringhe e nel 1999 si sono dimostrati fondamentali nella versione avanzata della teoria, quella delle superstringhe in dieci e undici dimensioni.

Gli ottonioni sembrano volerci dire che c'è qualcosa di molto strano sia nel numero 8, sia nella fisica della materia e dello spaziotempo. Un giochetto vittoriano è resuscitato in veste di chiave dei piú fitti misteri alla frontiera comune di matematica e fisica, soprattutto quelli relativi alle dimensioni dello spaziotempo: potrebbero davvero essere piú di 4 e sarebbe questa peculiarità a tenere insieme gravità e meccanica quantistica.

La storia degli ottonioni si svolge tutta nel regno etereo dell'algebra astratta. È stata ricostruita ottimamente in un bell'articolo di John Baez[1], da cui ho attinto a piene mani per la stesura di questo capitolo. Cercherò comunque di farvi assaporare le strane ma eleganti meraviglie che abitano questo reame al confine tra matematica e fisica. Proprio come succede nelle scene di *Amleto* con il fantasma del padre, ridotto a voce fuori campo, qui purtroppo molte scene devono svolgersi lontano dai vostri occhi, e io posso solo raccontarvi come è andata a finire. Sopportatemi e non preoccupatevi se ogni tanto salterà fuori un termine del gergo tecnico che non conoscete: a volte si ha bisogno di un modo comodo per etichettare ciò che si vede.

Facciamo un breve riepilogo per preparare la scena. L'allargamento dei sistemi numerici ci ha accompagnato piú volte lungo il nostro viaggio alla ricerca della simmetria. Il primo passo fu la scoperta (l'invenzione?) dei numeri complessi a metà del Cinquecento, cioè di un sistema in cui esistesse la radice quadrata di –1. Fino ad allora, tutti pensavano che i numeri fossero un dato di natura, un dono divino, unico e completo; «inventare» un numero nuovo era semplicemente impensabile. Ma attorno al 1550 Cardano e Bombelli lo fecero, cercando di dare un senso alle radici dei numeri negativi. Ci vollero quattro secoli perché i matematici capissero davvero cosa ciò comportasse, ma solo tre perché si convincessero che erano davvero utili e non andavano ignorati.

Nell'Ottocento il macchinoso linguaggio barocco dei due algebristi italiani si era ormai cristallizzato nel simbolo i. I numeri costruiti a partire da questo oggettino possono sembrare strani, ma risultano utilissimi in molti problemi di fisica matematica. La conduzione del calore, la propagazione della luce, del suono e delle onde in genere, l'elasticità, la gravità, l'elettricità, il magnetismo e la fluidodinamica cedono all'arsenale dei numeri complessi e si lasciano studiare, ma solo in due dimensioni.

Però il nostro universo ne ha tre, perlomeno questo è quanto credevamo fino a poco tempo fa. Non sarebbe bello avere un sistema numerico analogo ai complessi, ma in tre dimensioni e non due, che ci porti alla soluzione di problemi importanti nel mondo reale? Hamilton ci si ruppe la testa per anni, fino a quando, il 16 ottobre 1843, in un lampo di genio capí che doveva lasciar perdere le tre dimensioni e passare direttamente a quattro. Il risultato di questa pensata venne inciso sulla spalletta del ponte di Broome a Dublino.

Un vecchio compagno di università di Hamilton, tale John Graves, era un grande appassionato di algebra. Fu lui probabilmente a spingerlo sulla strada dell'estensione dei sistemi numerici. Il giorno dopo il suo atto vandalico sul ponte, Hamilton gli scrisse una lunga lettera a proposito dei quaternioni; Graves sulle prime si mostrò perplesso, chiedendosi se fosse legittimo inventarsi di punto in bianco nuove regole per la moltiplicazione: «Non mi sono ancora formato un'idea chiara sul nostro limite, sulla libertà che abbiamo di creare numeri immaginari e di dotarli di proprietà sovrannaturali», rispose. Ma al tempo stesso vide le potenzialità di quell'idea e si chiese fino a che punto si potesse generalizzare: «Se con l'alchimia siete in grado di produrre fino a tre chili d'oro, perché fermarsi a due?»

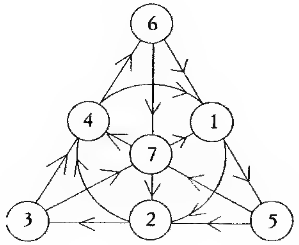
Era una buona domanda, a cui Graves cercò di rispondere da solo. Nel giro di due mesi aveva pronto un sistema numerico a otto dimensioni, che aveva chiamato ottetti. Era arrivato anche a una notevole formula sulla somma di otto quadrati, su cui torneremo. Si mise poi ad affrontare l'ipotesi di un sistema a sedici dimensioni ma si trovò di fronte a un intoppo inaspettato. Hamilton assicurò l'amico che l'avrebbe aiutato a far circolare la sua scoperta, ma era troppo preso dai suoi quaternioni e non aveva tempo da perdere. Poi si accorse di una potenziale fonte di guai: negli ottetti non vale la proprietà associativa. In altre parole le due espressioni $(ab)c$ e $a(bc)$ sono in genere diverse tra loro. Già era stato un tormento decidere di fare a meno della proprietà commutativa, ora rinunciare anche a quella associativa pareva troppo.

Arrivato a questo punto, Graves ebbe un vero colpo di sfortuna. Prima che il suo lavoro fosse pronto per la stampa, Cayley fece in modo indipendente la stessa scoperta e la infilò di straforo in un articolo terribile sulle funzioni ellittiche, un lavoro cosí zeppo di errori che sarebbe stato poi espunto dalla raccolta delle sue opere complete. Battezzò questa nuova creatura con il nome di ottonioni.

Graves non era certo felice del fatto che qualcuno avesse esposto quelle idee prima di lui, soprattutto perché il suo articolo stava per essere pubblicato proprio nella stessa rivista. Quindi aggiunse una nota al testo, in cui spiegava come l'idea gli fosse venuta due anni prima, e Hamilton lo sostenne con un breve scritto in cui confermava il fatto e auspicava che fosse riconosciuta la paternità dell'amico. Nonostante questa precisazione, gli ottonioni furono presto chiamati ottetti o numeri di Cayley, due espressioni ancora oggi molto in voga.

L'algebra degli ottonioni si può descrivere grazie a un notevole artificio geometrico, il cosiddetto *piano di Fano*. È uno spazio finito, composto da sette punti uniti tre a tre da sette rette, come si vede nella figura 15.1. Osserviamo che una «retta» si piega a formare un circolo per unire i suoi tre punti, ma la questione è irrilevante. Le proprietà di questa geometria sono inconsuete: presi due punti a caso c'è sempre una retta che li unisce; due rette si incontrano sempre in un punto e quindi non esistono le parallele. Il piano di Fano era stato inventato in un ambito del tutto diverso, ma come si scoprí presto incorporava nella sua struttura le regole per la moltiplicazione degli ottonioni.

Figura 15.1.
Il piano di Fano, con sette punti e sette rette.



Ci sono otto unità in questo sistema numerico: $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$; ognuno dei sette «e» elevato al quadrato fa -1, mentre le regole moltiplicative, come detto, si leggono sul piano di Fano. Supponiamo di voler calcolare $e_3 \times e_7$; guardiamo dove si trovano i punti 3 e 7, quale retta li unisce e qual è suo il terzo punto, in questo caso 1. Seguendo la direzione delle frecce, vediamo che si va da 3 a 7 e poi a 1, quindi vale $e_3 \times e_7 = e_1$. Invertendo l'ordine dei fattori si va in direzione opposta a quella della freccia e la regola ci dice che in questo caso dobbiamo anteporre un segno meno: $e_7 \times e_3 = -e_1$. Procedendo in questo modo per tutte le coppie possibili, avremo la tavola moltiplicativa completa degli ottonioni (addizione e sottrazione sono ovvie, come nei numeri complessi e nei quaternioni, e la divisione si ricava dalla moltiplicazione).

Graves e Cayley non sapevano di questo legame con la geometria finita, quindi dovettero scrivere esplicitamente tutte le regole. L'aiuto del piano di Fano venne in seguito.

Per molto tempo gli ottonioni rimasero un'innocua curiosità, perché contrariamente ai quaternioni non avevano alcuna interpretazione geometrica o applicazione ad altre scienze. Anche all'interno della matematica caddero nell'oblio. Fino a quando un giorno si è scoperto che sono all'origine delle piú bizzarre strutture algebriche in circolazione: i cinque gruppi eccezionali di Lie classificati da Killing, G_2, F_4, E_6, E_7 ed E_8. Inoltre, il piú grande di questi strani oggetti, E_8, salta fuori non una ma due volte nel gruppo di simmetrie alla base della teoria delle stringhe in dieci dimensioni, che ha molte proprietà utili e inconsuete ed è una delle candidate piú autorevoli al ruolo di Teoria del Tutto.

Se come Dirac pensiamo che l'universo affonda le radici nella matematica, potremmo azzardarci ad affermare che una Teoria del Tutto plausibile esiste perché esiste E_8, che a sua volta esiste perché esistono gli ottonioni. Dal punto di vista filosofico, si apre una stuzzicante possibilità: la struttura di base dell'universo in cui abitiamo, e che sappiamo essere speciale in molti modi, è individuata in modo particolare dalla sua relazione con una sola struttura matematica, cioè gli ottonioni.

«Bellezza è verità, verità bellezza». I pitagorici e i platonici avrebbero gradito molto questo possibile ruolo centrale di una struttura matematica nel sistema del mondo. Gli ottonioni hanno una bellezza conturbante e surreale, che Dirac avrebbe preso come forte indizio del fatto che la teoria delle stringhe a dieci dimensioni fosse vera. O, se per un caso sfortunato si fosse rivelata falsa, del fatto che fosse comunque piú interessante della verità, qualunque essa fosse. Ma abbiamo imparato a nostre spese che ci sono teorie eleganti e non necessariamente vere; dunque, prima del verdetto finale sulle superstringhe, dobbiamo ricordarci di essere nel campo delle pure speculazioni.

Qualunque risulterà essere il suo ruolo in fisica, la cassa in cui sono racchiusi gli ottonioni si è rivelata un vero tesoro per i matematici.

La relazione tra gli ottonioni e i gruppi di Lie eccezionali non è che uno dei tanti, strani legami che si sono scoperti tra varie strutture nate come generalizzazioni dei quaternioni e le frontiere della fisica contemporanea. Ora vorrei entrare un po' piú nel dettaglio per farvi toccare con mano quanto siano interessanti. Inizierò con una categoria di formule tra le piú antiche, cioè le somme di quadrati.

Una di queste nasce in modo naturale nell'ambito dei numeri complessi ed è l'espressione della *norma*, data dalla distanza di un numero dall'origine. Grazie al teorema di Pitagora sappiamo che un numero $x + iy$ ha norma (al quadrato, omettiamo per semplicità le radici) pari a $x^2 + y^2$. Le regole per il prodotto dei numeri complessi, scritte da Wessel, Argand, Gauss e Hamilton, ci mostrano una proprietà interessante della norma: se moltiplichiamo due numeri tra di loro, anche le loro norme si moltiplicano. Infatti, dopo aver ricordato che $(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$, abbiamo che $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$. Detto in altre parole, la somma di due quadrati per la somma di altri due quadrati è sempre un'altra somma di due quadrati. Questo fatto era già noto al matematico indiano Brahmagupta attorno al 650 e a Fibonacci attorno al 1200.

I pionieri della teoria dei numeri erano affascinati dalle somme di due quadrati, perché servivano a distinguere due tipi di numeri primi. È facile dimostrare che se un numero dispari è la somma di due quadrati deve avere per forza la forma $4k + 1$ per qualche intero k. Gli altri dispari, del tipo $4k + 3$, non sono rappresentabili come somma di due quadrati. Attenzione però, non è vero che tutti i numeri del tipo $4k + 1$ sono sempre somma di due quadrati, anche se ammettiamo che uno dei due possa essere zero: la prima eccezione è data da 21.

Fermat fece una scoperta molto bella: le eccezioni non sono mai numeri primi. Al contrario, tutti i primi del tipo $4k + 1$ sono somma di due quadrati. Applicando la formula vista sopra per il prodotto delle somme di quadrati, deduciamo che un numero dispari è somma di due quadrati se e solo se i suoi fattori primi del tipo $4k + 3$ hanno esponente pari. Vediamo un esempio con $45 = 3^2 + 6^2$; la sua fattorizzazione è $3^2 \times 5$, il fattore 3 è del tipo $4k + 3$ con $k = 0$, e l'esponente è 2, pari: tutto torna. L'altro fattore, 5, ha un esponente dispari ma è del tipo $4k + 1$ con $k = 1$, quindi non crea problemi.

D'altro canto $21 = 3 \times 7$; entrambi i fattori sono del tipo $4k + 3$ ed entrambi hanno esponente dispari: ecco perché 21 non si può scrivere come somma di due quadrati. Le eccezioni sono infinite e tutte hanno la stessa struttura di 21.

Un secolo piú tardi Lagrange fece uso di un metodo simile per dimostrare che *tutti* i numeri interi positivi si potevano scrivere come somma di *quattro* quadrati. La chiave era data da una importante formula scoperta da Eulero nel 1750. È simile a quella vista sopra per il prodotto delle somme di due quadrati e fornisce lo stesso risultato: la somma di quattro quadrati per la somma di altri quattro quadrati è sempre un'altra somma di quattro quadrati. Osserviamo che per tre quadrati le cose non funzionano, e ci sono eccezioni che ce lo mostrano (ossia coppie di numeri somme di tre quadrati il cui prodotto non lo è). Nel 1818 Degen trovò una formula analoga nel caso di *otto* quadrati, la stessa che Graves avrebbe poi ricavato grazie agli ottonioni. Poveretto: la sua scoperta originale, gli ottonioni, è stata attribuita a un altro, mentre la formula che tutti pensano sia sua, la somma di otto quadrati, non è originale.

C'è poi una relazione molto banale per la «somma» di un quadrato solo, cioè $x^2y^2 = (xy)^2$, che mostra nel caso dei numeri reali la proprietà della norma già vista per i complessi. La norma di un numero reale è uguale a prescindere dal segno, cioè è pari al valore assoluto del numero stesso.

E la formula per i quattro quadrati? Serve allo stesso scopo nell'ambito dei quaternioni. Il teorema di Pitagora in quattro dimensioni (sí, ha perfettamente senso) ci dice che il quaternione $x + iy + jz + kw$ ha norma $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, una somma di quattro quadrati. Valgono le stesse proprietà del caso complesso, il che spiega come nasca la formula di Eulero.

A questo punto avrete già capito tutto: la relazione di Degen ha un'interpretazione analoga per gli ottonioni, la cui norma continua ad avere la stessa proprietà moltiplicativa che ha negli altri sistemi numerici.

Ci dev'essere qualcosa di molto strano sotto. Abbiamo per le mani i reali, i complessi, i quaternioni e gli ottonioni, con dimensioni rispettivamente 1, 2, 4, 8. In ogni caso, abbiamo una formula che ci assicura che la somma di n quadrati per un'altra somma di n quadrati è un'altra somma di n quadrati, con $n = 1, 2, 4, 8$. Formule e sistemi numerici sono strettamente collegati.

Abbiamo 1, 2, 4, 8... Cosa viene dopo?

Se tutto continuasse a funzionare, ci aspetteremmo senza ombra di dubbio di trovare un interessante sistema numerico 16-dimensionale. In effetti c'è un modo naturale per arrivarci, detta costruzione di Cayley-Dickson, che funziona in generale: applicatela ai reali e ottenete i complessi, applicatela ai complessi e ottenete i quaternioni, e cosí via. Dunque dagli ottonioni si riescono a ricavare i *sedenioni*, e da questi si può salire a 32, 64... dimensioni.

Bene, c'è una formula anche per la somma di 16 quadrati?

No. La norma dei sedenioni non ha quella bella proprietà vista sopra, che si ferma al numero 8. Un altro caso della «legge dei piccoli numeri», in cui una struttura promettente che sembrava ripetersi secondo le potenze di 2 a un certo punto si blocca.

Perché? Per un motivo molto semplice. La costruzione di Cayley-Dickson fa perdere una proprietà algebrica ogni volta che viene applicata, dunque il sistema numerico d'arrivo si comporta in modo un po' meno ordinato di quello di partenza. Passo dopo passo, proprietà dopo proprietà, gli olimpici numeri reali diventano un sistema anarchico. Vediamo meglio di che si tratta.

I quattro sistemi numerici hanno altre caratteristiche in comune, che vanno oltre la proprietà della norma. La piú importante, quella che li rende vere estensioni dei numeri reali, è il fatto di essere *algebre di divisione*, cioè strutture in cui non solo è possibile sommare, sottrarre e moltiplicare (come accade in molte altre) ma anche dividere.

Piú precisamente, l'esistenza di una norma li rende algebre di divisione *normate*. Per qualche tempo, Graves ritenne che il modo in cui era passato da 4 a 8 si potesse ripetere, portando ad algebre di divisione normate con 16, 32, 64... dimensioni. Ma i sedenioni si rivelarono problematici, il che gli fece venire il dubbio che un'algebra a 16 dimensioni non potesse esistere. Aveva ragione. Oggi sappiamo con certezza che esistono solo quattro algebre di divisione normate, precisamente quelle di dimensione 1, 2, 4 e 8. Dunque non può esserci una formula dei 16 quadrati analoga alle altre viste sopra.

Perché? Perché ogni volta che saliamo un gradino, passando alla potenza successiva di 2, perdiamo per strada qualcosa. I numeri complessi perdono la proprietà d'ordine; i quaternioni non sono piú commutativi; gli ottonioni nemmeno associativi, cioè non è piú vero che $(ab)c = a(bc)$, anche se vale la piú ristretta proprietà *alternante* $(ab)a = a(ba)$. I sedenioni non sono neppure un'algebra di divisione.

Qui è all'opera qualcosa di piú profondo, che va ben oltre le tecniche di Cayley-Dickson. In effetti, nel 1898 Hurwitz dimostrò che i nostri quattro soliti sistemi sono le sole algebre di divisione normate e nel 1930 Max Zorn fece la stessa cosa per le algebre di divisione alternanti. Sono davvero quattro casi eccezionali.

Risultati di questo tipo fanno impazzire di gioia i matematici, che sotto sotto sono adepti del platonismo. Ma per il resto dell'umanità i casi importanti sembrano essere solo i numeri reali e i complessi, la cui rilevanza pratica è enorme. I quaternioni ogni tanto saltano fuori in qualche situazione esoterica, anche se utile, mentre gli ottonioni appaiono banditi dal regno della scienza applicata.

Fino a non molti anni fa pareva proprio che questa linea di ricerca avesse portato a un vicolo cieco iperastratto, a quelle sciocchezze intellettuali e presuntuose tipiche di gente che vive con la testa fra le nuvole.

La storia della matematica ha mostrato a piú riprese che scartare una teoria bella e profonda solo perché non sembra avere applicazioni immediate è una pessima mossa. Putroppo l'esperienza passata non sembra frenare i detrattori, che spesso si accaniscono contro una nuova idea *a causa* della sua estrema eleganza. Piú uno si sente una persona «pratica», piú tende a ridicolizzare i concetti matematici che nascono da questioni astratte, «fini a se stesse», e non da problemi reali. Piú è carina l'idea, maggiore è lo scorno, come se la bellezza formale fosse automaticamente qualcosa di cui vergognarsi.

Queste avventate dichiarazioni sono soggette a essere smentite dalle oscillazioni della fortuna. Basta una nuova applicazione, una nuova scoperta ed ecco che la tanto disprezzata teoria viene alla ribalta, non piú negletta ma indispensabile.

Gli esempi non si contano. Cayley pensava che le matrici fossero oggetti inutili, ma oggi nessun settore scientifico potrebbe farne a meno. Cardano proclamò i numeri complessi tanto sofisticati quanto inservibili, mentre oggi fisici e ingegneri li devono usare necessariamente nella pratica quotidiana. Godfrey Harold Hardy, il piú grande matematico inglese degli anni Trenta, era contentissimo del fatto che la sua specialità, la teoria dei numeri, non avesse applicazioni pratiche e in particolare non potesse servire in guerra. Oggi alcune delle sue scoperte stanno alla base della codifica e decodifica dei messaggi, che serve alla trasmissione sicura di dati, esigenza vitale nel settore economico e, ancora di piú, in quello militare.

Lo stesso sta accadendo agli ottonioni. Non è escluso che diventino un argomento obbligatorio in molti corsi universitari, soprattutto di fisica teorica. Oggi ci stiamo rendendo conto che sono fondamentali per la teoria dei gruppi di Lie, soprattutto per quelli piú importanti dal punto di vista fisico e per i cinque eccezionali G_2, F_4, E_6, E_7 ed E_8, con le loro misteriose dimensioni 14, 52, 78, 133 e 248. La loro stessa esistenza è un enigma, tanto che un ricercatore esasperato li ha proclamati frutto di un intervento punitivo della Provvidenza.

Chi ama la natura non si stancherebbe mai di tornare nei suoi posti preferiti, magari per trovare un nuovo punto da cui ammirarli: sotto una cascata, sul bordo di una siepe che costeggia un sentiero, su un promontorio da cui si domina un ampio panorama marino. Allo stesso modo ai matematici piace ritornare su vecchi argomenti e ammirarli da un diverso punto di vista. Grazie al cambiamento di prospettiva, spesso siamo in grado di reinterpretare vecchie idee in modi nuovi e piú significativi. Non è solo turismo intellettuale, fatto di comitive che vanno in estasi di fronte a ineffabili panorami matematici, ma soprattutto un'utile strategia per affrontare problemi vecchi e nuovi. In nessun altro settore si è osservato questo fenomeno piú che nella teoria dei gruppi di Lie.

Come ricorderete, Killing era riuscito a classificare i gruppi di Lie semplici, facendoli rientrare quasi tutti in quattro famiglie infinite, due delle quali sono in realtà sottofamiglie in dimensione pari e dispari di uno stesso gruppo, quello ortogonale speciale SO(n). Le altre due famiglie sono i gruppi unitari speciali SU(n) e quelli simplettici Sp($2n$).

Oggi sappiamo che sono tutte variazioni su uno stesso tema, vale a dire sono tutte matrici $n \times n$ *antihermitiane*, cioè dotate di una particolare proprietà algebrica. L'unica differenza è che in SO(n) i coefficienti di queste matrici sono reali, in SU(n) sono complessi e in Sp($2n$) sono quaternioni. Le famiglie sono infinite, perché infinite sono le dimensioni delle matrici. È meraviglioso constatare che le algebre di Lie corrispondenti alle trasformazioni naturali nella meccanica hamiltoniana, la prima grande scoperta del matematico irlandese, hanno una semplice descrizione in termini di quaternioni, la sua ultima impresa.

Viene da chiedersi cosa possa accadere con matrici di ottonioni. Purtroppo, per colpa della non associatività, non si ottiene un'altra famiglia di algebre di Lie semplici (in realtà dovrei dire «per fortuna», non «purtroppo», perché un'ulteriore famiglia andrebbe contro la classificazione di Killing). Però se giochiamo bene le nostre carte siamo in grado di ottenere un bel po' di algebre di Lie anche con gli ottonioni.

Il primo accenno si ebbe nel 1914, quando Élie Cartan affrontò una domanda che sembrava ovvia ottenendo una risposta sorprendente. Uno dei principî guida in matematica e fisica è questo: di fronte a un oggetto che si vuole studiare, per prima cosa è bene cercare di capire com'è fatto il gruppo delle sue simmetrie. Nel caso dei numeri reali la risposta è banale: è quello formato dalla sola identità, che lascia tutto fermo. Le simmetrie dei numeri complessi sono l'identità e una riflessione che trasforma i in $-i$. Quelle dei quaternioni sono le SU(2), cioè quasi le rotazioni nello spazio reale tridimensionale SO(3).

Cartan si chiese semplicemente: qual è il gruppo delle simmetrie degli ottonioni?

Solo un genio come lui poteva arrivare alla risposta: è G_2, il piú piccolo gruppo di Lie eccezionale. Un sistema 8-dimensionale ha un gruppo di simmetrie 14-dimensionale. La piú grande algebra di divisione normata è legata al piú piccolo dei gruppi semplici eccezionali.

Per fare un passo avanti dobbiamo affrontare un altro concetto, che affonda le sue origini nel Rinascimento e in special modo nella pittura.

A quel tempo la matematica e l'arte, e non solo l'architettura, erano piuttosto vicine. I pittori rinascimentali scoprirono un modo di applicare certe conoscenze geometriche alla prospettiva e trovarono le regole per disegnare sulla tela bidimensionale immagini che all'occhio dell'osservatore sembravano solide, tridimensionali. In questo modo inventarono anche una nuova e molto elegante branca della geometria.

Le opere degli artisti medievali non ci dànno la stessa impressione di realismo. Giotto era un maestro nella composizione di figure assai vivide, però a osservarle bene ci si accorge che manca sempre qualcosa perché l'occhio possa ricreare la sensazione di profondità. Fu Filippo Brunelleschi, nel 1425, il primo a formulare un metodo sistematico per ottenere gli effetti prospettici desiderati. Dieci anni piú tardi uscí il primo vero trattato in materia, il *De pictura* di Leon Battista Alberti.

La tecnica raggiunse forse il suo vertice nelle opere di Piero della Francesca, che era anche un abile matematico, capace di scrivere tre libri in materia. E certo non si può non citare il nome di Leonardo da Vinci, che all'inizio del suo *Trattato della pittura* afferma: «Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni». C'è un'eco del «Non entri chi non sa di geometria» che secondo la tradizione campeggiava sulla porta dell'Accademia platonica.

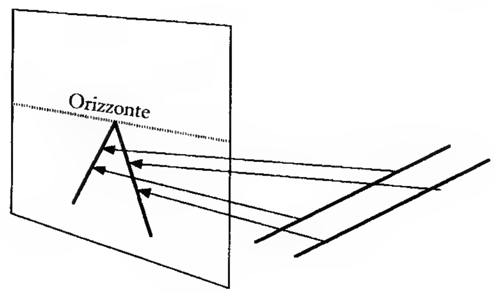
Il concetto chiave della prospettiva è la *proiezione*, grazie alla quale un oggetto tridimensionale viene riportato su una superficie collegandolo con linee immaginarie all'occhio dell'osservatore e segnando i punti di intersezione con la tela. È importante notare come prima cosa che la proiezione deforma le figure geometriche in modi non concessi dalle regole euclidee: tanto per cominciare, riesce a far incontrare le rette parallele.

È un fenomeno che tutti abbiamo sperimentato; basta osservare da un punto di vista leggermente sopraelevato i binari del treno o una strada perfettamente dritta per vedere due rette che accanto a noi sono parallele ma che all'orizzonte sembrano toccarsi. È ovvio che in realtà non si incontrano, ma la prospettiva fa in modo che l'occhio percepisca la loro distanza sempre piú piccola man mano che vanno verso l'infinito. Il fenomeno si può opportunamente tradurre anche in un modello matematico formale. In questo caso il punto di incontro delle rette non può stare sul loro stesso piano, perché ciò contraddirrebbe la definizione di parallele; è invece il corrispettivo dell'orizzonte, verso cui sembrano tendere. Sul piano delle rette l'orizzonte è infinitamente distante, ma la sua proiezione è invece una normale retta a metà del foglio, come si vede nella figura 15.2.

I matematici chiamano questa proiezione dell'orizzonte la «retta all'infinito». È un parto della nostra immaginazione, come la radice quadrata di -1, ma è molto utile. La geometria che risulta in questo caso si dice *proiettiva* e nello spirito del programma di Erlangen enunciato da Klein la definiamo come la geometria invariante per l'azione delle proiezioni. Ogni artista che usi una linea dell'orizzonte dotata di «punti di fuga» come ausilio per dipingere figure in prospettiva sta facendo piú o meno consciamente un esercizio di geometria proiettiva.

Il formalismo su un piano proiettivo è molto elegante. Dati due punti distinti esiste una sola retta che li unisce, come in Euclide, ma qui vale il viceversa: due rette distinte hanno sempre un punto in co-

Figura 15.2.
Grazie alla proiezione, due linee parallele si incontrano all'orizzonte.



mune. Le parallele, che tanti grattacapi hanno creato alla geometria classica, semplicemente non esistono.

Se tutto ciò vi ricorda il modo con cui abbiamo costruito il piano di Fano, siete nel giusto: quello è un esempio di spazio proiettivo finito.

La strada che va dai pittori rinascimentali ai gruppi di Lie è davvero corta. Il piano proiettivo, implicito nei lavori di Leon Battista Alberti e colleghi, fu esplicitato un paio di secoli dopo. Nel 1636 Girard Desargues, un ufficiale dell'esercito francese che divenne poi architetto e ingegnere, pubblicò un trattato il cui titolo tradotto recitava «Bozza di un saggio su quello che si ottiene sezionando un cono con un piano». Sembrava un saggio sulle coniche e in effetti lo era ma, al posto dei metodi classici risalenti all'antica Grecia, Desargues faceva uso nelle sue deduzioni della geometria proiettiva. Proprio come la geometria euclidea del piano si poteva tradurre in algebra grazie alle coordinate cartesiane (x, y), cosí avvenne per quella proiettiva: bastava permettere (con una serie di accorgimenti tecnici, che sostanzialmente prevedevano l'uso dei rapporti fra tre coordinate) che x o y assumessero anche valori infiniti.

Il passaggio dai reali ai complessi non crea alcun problema; si costruisce dunque con lo stesso procedimento il piano proiettivo complesso. Allora, perché non provare anche con quaternioni e ottonioni?

Qui cominciano i problemi. I metodi piú naturali non funzionano perché manca la commutatività. Ma nel 1949 Pascual Jordan trovò un modo sensato per costruire un piano proiettivo ottonionico, con 16 dimensioni reali. L'anno dopo Armand Borel dimostrò che il secondo gruppo di Lie eccezionale F_4 è il gruppo delle simmetrie per questo oggetto.

Dunque due dei cinque gruppi eccezionali sembravano originarsi a partire dagli ottonioni. E gli altri tre?

L'opinione che i gruppi eccezionali fossero polpette avvelenate lasciate in giro da una divinità malvagia era prevalente fino al 1959, quando Hans Freudenthal e Jacques Tits, in maniera indipendente, inventarono il «quadrato magico» e spiegarono l'esistenza di E_6, E_7 ed E_8.

Righe e colonne di questo quadrato corrispondono alle quattro algebre di divisione normate. Presa una coppia qualsiasi, l'incrocio della riga e della colonna corrispondente fornisce, grazie a una certa ricetta matematica, un gruppo di Lie. In certi casi la risposta è prevedibile; ad esempio all'incrocio tra i reali e i reali c'è SO(3), il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale ordinario. Combinando quaternioni e quaternioni si ottiene SO(12), le rotazioni in un 12-spazio reale, che per un matematico è un oggetto non particolarmente esotico. Ma nella riga e nella colonna degli ottonioni compaiono proprio loro, i gruppi eccezionali F_4, E_6, E_7 ed E_8. Manca G_2, che però come abbiamo visto ha un legame strettissimo con gli ottonioni, visto che è il gruppo delle loro simmetrie.

Oggi l'opinione generale è cambiata: i gruppi eccezionali sono tra noi in virtú di una divinità benigna che permette l'esistenza degli ottonioni. Dovevamo immaginarlo. Einstein lo diceva sempre: sottile è il Signore, ma non malizioso.

Attorno al 1956 il russo Boris Rosenfeld, forse presagendo l'idea del quadrato magico, avanzò l'ipotesi che E_6, E_7 ed E_8 fossero anche loro gruppi delle simmetrie di qualche piano proiettivo, costruito però non a partire dagli ottonioni, ma da queste strutture:

- per E_6: i bi-ottonioni, formati da numeri complessi e ottonioni;
- per E_7: i quadri-ottonioni, formati da quaternioni e ottonioni;
- per E_8: gli otto-ottonioni, formati da ottonioni e ottonioni.

C'era solo un piccolo problema: nessuno aveva idea di come definire in modo sensato dei piani proiettivi a partire da queste combinazioni di sistemi numerici. Però c'erano indizi del fatto che l'operazione potesse funzionare. Oggi siamo in grado di dimostrare la congettura di Rosenfeld, ma solo facendo uso dei gruppi per costruire i piani. Non è una prova soddisfacente, perché l'idea originale andava in direzione opposta. Però è meglio che niente. Abbiamo nel frattempo trovato modi indipendenti per costruire i piani partendo da E_6 ed E_7; solo E_8 non vuole cedere.

Se non ci fossero stati gli ottonioni, la storia dei gruppi di Lie sarebbe stata piú semplice, come Killing sperava all'inizio della sua impresa, ma molto meno interessante. A noi mortali non è data scelta, visto che ottonioni e compagnia sono lí e ci restano. Addirittura, forse da loro dipende in qualche misterioso modo l'esistenza stessa dell'universo.

I legami tra gli ottonioni, la vita, l'universo e tutto quanto sono saltati fuori grazie alla teoria delle stringhe, la cui caratteristica principale è data dalle dimensioni extra. In linea di principio queste possono assumere molte forme, e il difficile è capire quale sia quella giusta. Nella vecchia, cara meccanica quantistica la simmetria era un principio basilare; cosí deve essere anche per le stringhe. Quindi per forza di cose entrano in scena i gruppi di Lie e tanto per cambiare quelli eccezionali si distinguono: non come seccature, ma per la possibilità che si rendano protagonisti di strane coincidenze e facciano andare tutto a posto nella teoria.

Il che ci riporta agli ottonioni.

Ecco un esempio di come spuntino dappertutto. Negli anni Ottanta i fisici si accorsero che negli spazi di dimensioni 3, 4, 6 e 10 valeva un'elegante relazione tra vettori (segmenti orientati) e spinori (marchingegni algebrici creati da Paul Dirac all'interno delle sue ricerche sullo spin dell'elettrone). Perché? Perché si è scoperto che ciò è vero se e solo se lo spazio ha dimensione pari a 2 piú quella di un'algebra di divisione normata: da 3, 4, 6 e 10 si ottiene proprio 1, 2, 4 e 8.

Il punto è che nelle teorie di stringa a 3, 4, 6 e 10 dimensioni ogni spinore si può rappresentare usando due numeri appartenenti alla corrispondente algebra. Questo fatto non accade con altre dimensioni e ha alcune importanti conseguenze. Dunque le teorie di stringa candidate si possono definire, rispettivamente, reale, complessa, quaternionica e ottonionica. E capita che allo stato attuale delle ricerche la candidata piú autorevole a essere un modello della realtà fisica sia proprio quella a dieci dimensioni, cioè ottonionica. Se si rivelasse corretta, l'universo che abitiamo sarebbe costruito a partire dagli ottonioni.

E non è l'unica situazione in cui saltano fuori con un ruolo importante questi strani «numeri», appartenenti alla categoria per un soffio, visto che soddisfano solo i requisiti minimi per essere un'algebra di divisione. La nuova candidata di moda, la M-teoria, prevede uno spaziotempo a undici dimensioni. Per far sí che corrispondano alle quattro da noi percepite, dobbiamo prendere le rimanenti sette e arrotolarle strettamente. E come si fa dal punto di vista tecnico questa operazione? Grazie a G_2, il gruppo di Lie eccezionale, cioè il gruppo delle simmetrie degli ottonioni.

Ancora loro. Non piú curioso relitto dell'era vittoriana, ma poderoso indizio verso una probabile Teoria del Tutto. Verso un mondo ottonionico.

[1] Baez 2002.

Capitolo sedicesimo
In cerca di verità e bellezza

Dunque Keats aveva ragione? Bellezza è verità, verità è bellezza? Le lega un forte e intimo legame, forse dovuto al fatto che la nostra mente reagisce a questi due stimoli in modo simile. Ma quel che va bene per la matematica non è detto funzioni anche per la fisica, e viceversa. La relazione tra le due discipline, profonda, sfaccettata e non sempre comprensibile, porta a un complesso dilemma filosofico: in che modo la scienza ha scoperto le leggi che apparentemente governano la natura e perché queste sembrano tutte scritte in lingua matematica?

L'universo è davvero matematico? O forse è tutta un'invenzione dell'ingegno umano? O magari ci sembra matematico perché questo è l'aspetto della sua infinita complessità che riusciamo a cogliere?

La matematica non è la versione astratta di una qualche verità profonda, come molti pensavano un tempo. Se c'è un fatto che balza agli occhi dalla nostra storia è che questa scienza è fatta di persone in carne e ossa, per cui possiamo tranquillamente provare empatia, sia nei trionfi sia nelle sconfitte. Chi non si commuove di fronte al terribile destino di Abel e Galois, morti entrambi a soli ventun anni? Uno fu molto amato ma era troppo povero per sposarsi e godere di questo amore; l'altro, intelligente e nevrotico, si innamorò ma fu respinto, e ciò lo condusse probabilmente alla fine. La medicina contemporanea sarebbe in grado di curare il povero Abel – e forse anche di disintossicare Hamilton.

I matematici sono uomini che vivono normali esistenze in mezzo al mondo, dunque la scienza che producono è in parte un processo sociale, come è vero per tutte le discipline. In parte, però, non del tutto, come sostengono i cantori del relativismo. Infatti è un processo che deve sottostare a rigidi vincoli esterni: la logica, nel caso della matematica, e l'esperienza, nel caso delle scienze. Per quanto forte sia la pressione culturale a favore della trisezione dell'angolo con riga e compasso, siamo sicuri che non potrà mai avvenire. Per quanto la comunità dei fisici desideri fortemente che la teoria gravitazionale di Newton sia la descrizione piú vera e completa dell'universo, la precessione del perielio di Mercurio è lí a testimoniare che ciò non è possibile.

Ecco perché i matematici seguono testardamente la logica e sono ossessionati da problemi che il resto dell'umanità trova irrilevanti. Ma è *davvero* importante sapere che le equazioni di quinto grado non si possono risolvere per radicali?

Il verdetto della storia però è chiaro: sí, è importante. Forse le conseguenze di questo sapere non sono percepibili nella vita di tutti i giorni, ma di sicuro lo sono a livello generale, per l'umanità tutta; non perché dalla soluzione per radicali di una quintica dipenda qualche fatto importante, ma perché aver capito come stanno le cose ci ha aperto la porta segreta che ci ha condotti in un nuovo mondo matematico. Se Galois e i suoi predecessori non avessero perseguito in modo ossessivo la conoscenza, non avessero fatto di tutto per sviscerare le condizioni necessarie perché un'equazione sia risolubile per radicali, la teoria dei gruppi sarebbe stata scoperta con grande ritardo, forse mai.

D'accordo, i gruppi non si trovano in cucina o lungo la strada che vi porta in ufficio, ma senza questi oggetti la scienza moderna sarebbe handicappata, e le nostre vite molto diverse. Non tanto per la mancanza di gadget come i jet, il GPS o i cellulari (che fanno comunque parte della storia), ma per via della minore comprensione del mondo naturale. Nessuno avrebbe mai scommesso che una pedante questione algebrica avrebbe portato a rivelare la struttura profonda del mondo fisico, ma è successo davvero.

Il messaggio della storia è chiaro e semplice: la ricerca di base su complessi problemi matematici non merita di essere ostacolata o denigrata perché «priva di applicazioni pratiche». La buona matematica è piú preziosa dell'oro, e la sua origine è del tutto irrilevante. L'importante è dove ci conduce.

È davvero sorprendente il fatto che la migliore matematica in genere sia quella che porta in territori inaspettati, spesso di vitale importanza in vari settori scientifici o tecnologici, pur essendo stata concepita in origine per tutt'altro scopo. L'ellisse, studiata dai Greci in quanto sezione di un cono, fu l'indizio che portò dalle osservazioni di Tycho Brahe sull'orbita di Marte a Keplero e infine a Newton e alla gravitazione universale. Le matrici, il cui inventore Cayley si schermiva perché pensava di aver prodotto oggetti irrilevanti, oggi sono indispensabili in economia, statistica e quasi ogni altra disciplina scientifica. I bizzarri ottonioni potrebbero rivelarsi l'ispirazione giusta per una Teoria del Tutto. Certo è possibile che le superstringhe alla fine si dimostrino solo un gradevole esercizio matematico, irrilevante per il mondo fisico. Se cosí fosse, basterebbero comunque le applicazioni della simmetria alla meccanica quantistica per dimostrare che la teoria dei gruppi aiuta a capire in profondità i fenomeni naturali, anche se è nata in risposta a un quesito puramente teorico.

Perché certi enti matematici si rivelano cosí utili in campi dove i loro inventori non intendevano certo approdare?

Per Platone «Dio geometrizza sempre»; per Galileo il libro della natura «è scritto in lingua matematica»; per Keplero i numeri guidavano le orbite dei pianeti, e da alcuni di questi numeri (esclusi quelli misticheggianti) Newton sarebbe partito per approdare alla legge di gravitazione.

Molti scienziati moderni hanno detto la loro sul sorprendente potere del pensiero matematico. Uno degli interventi piú celebri è quello di Eugene Wigner, che scrisse un articolo nel 1960 intitolato «Sull'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali»:

> Vorrei affrontare due punti. Per cominciare, l'incredibile utilità della matematica nelle scienze naturali è un fatto che ha del misterioso e che non ammette alcuna spiegazione razionale. In secondo luogo, è proprio l'inquietante efficacia delle idee matematiche che ci spinge a chiederci se le nostre teorie fisiche siano davvero uniche. [...]
>
> Il fatto che il linguaggio della matematica sia miracolosamente adatto a formulare le leggi fisiche è un dono meraviglioso, che non comprendiamo e non meritiamo. Dovremmo esserne grati e sperare che rimanga con noi anche nelle ricerche future, e che questa fonte di gioia ma anche di stupore allarghi il raggio d'azione, nel bene e nel male, ad altri settori piú vasti del sapere[1].

Secondo Paul Dirac la natura doveva essere scritta in lingua matematica, e anche in modo elegante. A parer suo, verità e bellezza erano due facce della stessa medaglia, e la bellezza di una teoria dal punto di vista matematico costituiva un forte indizio della sua verità. Arrivò persino a dire che avrebbe preferito un'idea bella rispetto a una vera, e che la bellezza era piú importante della semplicità: «Lo studioso, mentre cerca con tutte le sue forze di esprimere le leggi fondamentali della natura in forma matematica, dovrebbe tendere massimamente all'eleganza. La semplicità dei concetti deve essere subordinata alla bellezza [...] e in caso di conflitto quest'ultima dovrebbe prevalere».

È interessante notare che le idee di Dirac circa la bellezza erano molto diverse da quelle della maggioranza dei colleghi. Non teneva conto del rigore logico, e infatti i suoi lavori sono costellati da buchi nelle dimostrazioni. L'esempio piú famoso è la funzione delta che porta il suo nome e che ha proprietà autocontraddittorie; lui comunque la usò in modo assai efficace e alla fine altri matematici riformularono le sue idee in modo rigoroso: a quel punto era davvero un'opera d'arte.

Eppure, come fa notare Helge Kragh, autore di una biografia scientifica di Dirac[2], «tutte le sue scoperte piú importanti sono avvenute prima del 1935 circa. Dopo quella data non ha praticamente prodotto ricerca fisica di valore duraturo. Non è irrilevante ricordare qui che il principio dell'eleganza matematica ha governato il suo pensiero soprattutto negli anni della maturità».

Non è irrilevante, forse, ma nemmeno corretto. Dirac magari rese esplicita la sua linea di condotta in età matura, ma vi si attenne fin dagli inizi. *Tutti* i suoi lavori migliori sono matematicamente eleganti e la bellezza per lui ha sempre costituito un test che gli consentiva di capire se si stava muovendo nella giusta direzione. Tutto ciò sembra implicare che l'eleganza non sia *la stessa cosa* della verità fisica, ma che sia *necessaria*, non sufficiente, per la verità. Molte teorie esteticamente magnifiche si sono dimostrate dei vaniloqui, dopo essersi confrontate con gli esperimenti. Nelle parole di Thomas Huxley, «la scienza è senso comune organizzato, un campo aperto dove molte eleganti teorie sono state uccise da un rozzo dato di realtà».

Eppure ci sono tante prove del fatto che la natura, in fondo, è bella. Hermann Weyl, le cui ricerche si sono concentrate sui legami fra la teoria dei gruppi e la fisica, ha detto un giorno: «Il mio lavoro è sempre stato quello di unire verità e bellezza, e quando ho dovuto sceglie-

re tra una delle due ho sempre preferito la bellezza». In una lettera ad Einstein, Werner Heisenberg scriveva:

> Potrebbe obiettare che con il tirare in ballo la semplicità e la bellezza io stia introducendo nel discorso criteri di verità estetici; ammetto francamente di essere molto attratto dalla concisa eleganza degli schemi matematici con cui il mondo si presenta all'uomo. Anche lei deve essersi sentito cosí, quando la natura ci sciorina davanti all'improvviso le sue relazioni, la cui semplicità e completezza mi fanno quasi paura.

Einstein, da parte sua, era ben consapevole del fatto che molte idee fondamentali ancora ci sfuggivano, come la natura del tempo, le cause prime del comportamento ordinato della materia, la forma dell'universo ecc., e che quindi avremmo fatto bene a ricordarci quanto eravamo ancora lontani da una teoria onnicomprensiva, qualunque essa fosse. Fino a quando è utile, l'eleganza matematica ci fornisce verità solo locali e temporanee. Eppure è il miglior modo a nostra disposizione per andare avanti.

Nel corso della storia, la matematica si è arricchita grazie a due fonti principali. Una è il mondo naturale, l'altra è l'astrazione del pensiero logico. Sono queste due basi che, agendo insieme, dànno alla disciplina il suo potere di fornirci informazioni sull'universo. Dirac l'aveva capito benissimo: «Il matematico è impegnato in un gioco di cui si scrive da solo le regole, mentre il fisico gioca con le regole fornite dalla natura. Ma con il passare del tempo appare sempre piú evidente che le regole che un matematico trova interessanti sono proprio le stesse scelte dalla natura». La scienza pura e quella applicata si completano a vicenda; non sono due poli separati, ma gli estremi di uno spettro continuo di pensiero.

La storia della simmetria dimostra che anche una risposta negativa a una domanda sensata («è possibile risolvere per radicali l'equazione di quinto grado?») può portare a teorie matematiche fondamentali. L'importante è capire perché la risposta è quella. I metodi impiegati per l'indagine potranno poi essere sfruttati per risolvere molti altri problemi, tra cui magari qualche questione aperta in fisica. Ma la nostra storia mostra anche che la salute della matematica dipende dall'infusione di nuova linfa proveniente dal mondo fisico.

La vera forza della disciplina sta proprio in questa notevole compenetrazione tra il senso umano innato della struttura (bellezza) e il mondo, che serve sia come discriminante (verità) sia come inesauribile fonte di ispirazione. Non è possibile risolvere i problemi posti dalle scienze senza nuove idee matematiche. Ma i concetti fini a se stessi, se portati all'estremo, possono degenerare in giochi senza senso. Le richieste della scienza tengono la matematica impegnata in campi fruttuosi e spesso ne fanno aprire di nuovi.

Se la ricerca matematica fosse totalmente asservita alla domanda, come una schiava della scienza, la qualità del suo lavoro sarebbe quella di una persona non libera, di cattivo umore, ostile e lenta. Se invece dominasse l'offerta, cioè le esigenze interne alla disciplina, otterremmo una mocciosa viziata ed egoista, che si dà un sacco di arie. La migliore matematica controbilancia armoniosamente le sue richieste con quelle del mondo esterno.

Ecco da dove arriva la sua irragionevole efficacia. Una personalità equilibrata fa tesoro delle esperienze e utilizza ciò che ha appreso in altre circostanze. Il mondo esterno in passato ha stimolato la nascita di teorie matematiche di gran classe, che però sono in grado di andare avanti da sole e superare le loro origini.

L'anonimo babilonese che scoprí come si risolvevano le equazioni di secondo grado non poteva certo immaginare che l'eredità di quell'idea sarebbe durata piú di tre millenni. Nessuno poteva prevedere che il domandarsi se una certa equazione fosse risolubile avrebbe portato a una chiave di volta della matematica, il concetto di gruppo, che a sua volta si sarebbe rivelato il linguaggio della simmetria. Ancora piú improbabile era prevedere che la simmetria avrebbe svelato molti segreti della fisica.

Conoscere la tecnica per risolvere un'equazione di secondo grado ha un'utilità molto limitata in fisica. Conoscere quella per le equazioni di quinto grado ne ha ancora di meno, perché deve essere per forza numerica, non simbolica, oppure impiegare simboli appositamente inventati per l'occasione, che si limitano a coprire il problema con una foglia di fico. Ma capire la ragione per cui non esiste una formula generale per le equazioni di quinto grado, riconoscere il ruolo fondamentale della simmetria e spingere piú in là possibile le idee che

stanno alla base di tutto ciò si è rivelato un programma di ricerca in grado di spalancare nuovi orizzonti fisici.

E non è finita qui. L'azione della simmetria nel campo della fisica e delle scienze in genere è ancora relativamente poco esplorata. Molto ancora ci sfugge. Ma abbiamo capito che i gruppi delle simmetrie sono i sentieri che ci guidano nella giungla della realtà, almeno fino a quando non salterà fuori un'idea piú utile e profonda (forse già presente oggi, nascosta in qualche tesi di laurea che nessuno ha letto).

In fisica la bellezza non garantisce automaticamente la verità, ma aiuta a trovare la strada.

In matematica, la bellezza deve essere anche verità, perché ciò che è falso non è bello.

[1] E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, in «Communications in Pure and Applied Mathematics», XIII, n. 1 (febbraio 1960) [*N. d. T.*].

[2] Kragh 1990.

Bibliografia

BAEZ, JOHN C., *The octonions*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», XXXIX (2002), pp. 145-205.

BELL, ERIC T., *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York 1937 [trad. it. *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze 1950, 2000].

BOURGNE, ROBERT, e AZRA, JEAN-PIERRE (a cura di), *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris 1962.

BOYER, CARL B., *A History of Mathematics*, Wiley, New York 1968 [trad. it. *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1980].

BÜHLER, WALTER K., *Gauss: A Biographical Study*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1981.

CARDANO, GEROLAMO, *Artis Magnae, sivi de regulis algebricis, liber unus*, Norimbergae 1545 [trad. ingl. *The Great Art of the Rules of Algebra*, a cura di T. R. Witmer, Mit Press, Cambridge (Mass.) 1968].

–, *De propria vita liber* (1575), apud Iacobum Villery, Parisiis 1643 [trad. it. *Autobiografia*, a cura di P. Franchetti, Einaudi, Torino 1945].

COLEMAN, ALBERT J., *The greatest mathematical paper of all time*, in «Mathematical Intelligencer», XI (1989), pp. 29-38.

COOLIDGE, JULIAN L., *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover, New York 1963.

DAVIES, PAUL, e BROWN, JULIAN, *Superstrings*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.

DUDLEY, UNDERWOOD, *A Budget of Trisections*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1987.

DUMAS, ALEXANDRE, *Mes Mémoires*, vol. IV, Gallimard, Paris 1967.

EUCLIDE, *Gli elementi*, a cura di A. Frajese e M. Maccioni, Utet, Torino 1970.

GAUSS, CARL FRIEDRICH, *Disquisitiones arithmeticae*, apud Gerhard Fleischer, Lipsia 1801 [trad. ingl. a cura di A. A. Clarke, Yale University Press, New Haven 1966].

GHEVERGHESE, JOSEPH GEORGE, *The Crest of the Peacock*, Penguin, London 1990 [trad. it. *C'era una volta un numero*, il Saggiatore, Milano 2000].

GREENE, BRIAN, *The Elegant Universe*, Norton, New York 1999 [trad. it. *L'universo elegante*, Einaudi, Torino 2000].

GULLBERG, JAN, *Mathematics: From the Birth of Numbers*, Norton, New York 1997.

KAKU, MICHIO, *Hyperspace*, Oxford University Press, Oxford 1994 [trad. it. *Iperspazio*, Macro, Cesena 2002].

KLINE, MORRIS, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford 1972 [trad. it. *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino 1991].

KRAGH, HELGE S., *Dirac: A Scientific Biography*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

LIVIO, MARIO, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, New York 2005 [trad. it. *L'equazione impossibile*, Rizzoli, Milano 2005].

LUMINET, JEAN-PIERRE, *Les trous noirs*, Seuil, Paris 1987 [trad. it. *I buchi neri*, Nardi, Firenze 1992].

ORE, OYSTEIN, *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, Minneapolis 1957.

PAIS, ABRAHAM, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, Oxford 1982 [trad. it. *"Sottile è il Signore..."*, Bollati Boringhieri, Torino 1991].

PENROSE, ROGER, *The Road to Reality*, Cape, London 2004 [trad. it. *La strada che porta alla realtà*, Rizzoli, Milano 2005].

RANDALL, LISA, *Warped Passages*, Allen Lane, London 2005 [trad. it. *Passaggi curvi*, il Saggiatore, Milano 2006].

ROSEN, MICHAEL I., *Niels Hendrik Abel and the equations of the fifth degree*, in «American Mathematical Monthly», CII (1995), pp. 495-505.

ROTHMAN, TONY, *The short life of Évariste Galois*, in «Scientific American», aprile 1982, pp. 112-20 [trad. it. *La breve vita di Évariste Galois*, in «Le Scienze», n. 166 (giugno 1982), pp. 112-27].

SAGGS, HENRY W. F., *Everyday Life in Babylon and Assyria*, Putnam, New York 1965.

SMOLIN, LEE, *Three Roads to Quantum Gravity*, Basic Books, New York 2001.

STEINHARDT, PAUL J., e TUROK, NEIL, *Why the cosmological constant is small and positive*, in «Science», CCCXII (2006), pp. 1180-83.

STEWART, IAN, *Galois Theory*, Chapman and Hall – CRC Press, Boca Raton 2004[3].

TARTAGLIA, NICCOLÒ, *Quesiti et inventioni diverse*, per Venturino Ruffinelli, Venezia 1546.

TIGNOL, JEAN-PIERRE, *Galois's Theory of Algebraic Equations*, Longman, London 1988.

WITTEN, EDWARD, *Magic, mysteries, and matrix*, in «Notices of the American Mathematical Society», XLV (1998), pp. 1124-29.

TESTI DISPONIBILI IN INTERNET

The MacTutor History of Mathematics Archive, www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

HULPKE, A., *Determining the Galois group of a rational polynomial*, www.math.colostate.edu/~hulpke/talks/galoistalk.pdf.

ROTHMAN, T., *Genius and biographers: The fictionalization of Évariste Galois*, www.-physics.princeton.edu/~trothman/galois.html.

Indice analitico

Stampato per conto della Casa editrice Einaudi
presso Mondadori Printing S.p.A., Stabilimento N.S.M., Cles (Trento)
nel mese di agosto 2008

C.L. 18529

Ristampa							Anno			
0	1	2	3	4	5	6	2008	2009	2010	2011

Saggi 896

I matematici non sono astrazioni: sono uomini in carne e ossa, con i loro problemi, i loro amori piú o meno corrisposti, le loro ambizioni, le frustrazioni, talvolta le pazzie. Anche il risultato del loro lavoro non è semplicemente una formula astrusa e di poca utilità, ma la soluzione (o la dimostrazione dell'impossibilità di una soluzione!) di un determinato problema, perseguito in genere per motivi contingenti molto solidi. Avviene spesso, tuttavia, che i risultati della matematica trovino utilizzi inaspettati in campi molto distanti da quelli di partenza. Uno di questi casi è la «teoria dei gruppi», la cui formulazione si deve al genio tormentato di Évariste Galois, uno sfortunato giovane rivoluzionario francese, morto a ventun anni in un duello, all'alba, a causa di una donna che con ogni probabilità neppure amava. Gli appunti lasciati nella notte precedente il duello rappresentano l'inizio di una nuova formulazione del concetto stesso di simmetria, le cui conseguenze condizionano enormemente il nostro modo di vedere il mondo.

Partendo dagli scribi dell'antica Babilonia e giungendo sino ai fisici del XXI secolo, *L'eleganza della verità* racconta la storia di come i matematici si siano imbattuti nel concetto di simmetria e abbiano cercato di dare un senso all'apparente relazione che lega l'intero universo all'eleganza stessa delle leggi matematiche. La corrispondenza tra le idee matematiche e il mondo fisico – la simmetria tra il nostro senso estetico e i piú profondi concetti algebrici –, è un mistero affascinante, che si dipana lentamente nelle pagine di questo libro. Forse nessuno sa dire perché la bellezza sia verità e la verità bellezza, ma di sicuro Ian Stewart ci mostra, con grande maestria, l'infinita complessità della loro relazione.

Ian Stewart insegna matematica alla Warwick University. Tra i piú noti e apprezzati divulgatori scientifici in campo internazionale, ha tra l'altro scritto *Dio gioca a dadi?* (Torino 1993), *Che forma ha un fiocco di neve?* (Torino 2003) e *Com'è bella la matematica* (Torino 2006). Per Einaudi ha pubblicato *Come tagliare una torta e altri rompicapi matematici* (ET Pop 2008).

ISBN 978-88-06-18529-9

9 788806 185299

€ 25,00